

Lernumgebung Kombinatorik

Autor/-in: Mirjam Rutishauser

Entstanden 2021 im Rahmen des Forschungsprojekts «MaBeLL-INT»
der PHTG (Brunner, 2018)



Anleitung, Tipps und Gedanken zu den Kombinatorikaufgaben

Hintergrund der Lernumgebung Kombinatorik

Bei der dritten Datenerfassung der Studie «MaBeLL-INT» lösten einige Schülerinnen und Schüler (SuS) die zwei Zusatzaufgaben aus dem Bereich der Kombinatorik. Die Leistungen der Lernenden werden aktuell ausgewertet und analysiert. Diese Lernumgebung soll den Schülerinnen und Schülern einen spielerischen Zugang zur Kombinatorik ermöglichen, sowie das Selbstvertrauen und die Motivation stärken Kombinatorikaufgaben zu lösen. Da sich die Studie «MaBeLL-INT» mit dem «mathematischen Begründen» auseinandersetzt, hat dieses auch in der vorliegenden Lernumgebung einen hohen Stellenwert.

In einer Längsschnittstudie beschreiben Maher, Powell und Upthegrove (2010) die Veränderung, Anpassung und Erweiterung von Darstellungen von Kombinatorikaufgaben im Verlauf der Schulzeit. Demzufolge sind im Unterricht möglichst viele verschiedene Darstellungsformen wünschenswert, da diese den Lernenden helfen unter anderem innermathematische Strukturen und Regelmässigkeiten zu erkennen (Herzog et al., 2017). Mit dieser Lernumgebung lernen die Schülerinnen und Schüler fünf verschiedene Darstellungsformen kennen.

Materialien der Lernumgebung

- > Anleitung, Tipps und Gedanken inkl. Lösungen
- > Sechs Poster zu den Darstellungsformen für den Unterricht und zum Aufhängen
- > Sechs Aufgabenkarten mit Kombinatorikaufgaben für die SuS

Leitfaden zum Einsatz im Unterricht

Die Lernumgebung kann in mehreren Mathematiklektionen oder als grösseren Block eingesetzt werden. Dieser Leitfaden dient der Lehrperson als Unterstützung bei der Planung.

Sprung ins kalte Wasser

1. Die SuS werden zu Beginn direkt mit der Aufgabenkarte «Gruppenfoto 1» konfrontiert. Diese Aufgaben versuchen sie in Gruppen und ohne Unterstützung der Lehrperson zu lösen.
2. Im Kreis werden anschliessend die verschiedenen Lösungen gezeigt und/oder präsentiert. Alle Lösungsansätze werden bis dahin akzeptiert und noch nicht gewertet. «Habt ihr auch alle Kombinationen gefunden?» Evtl. Strukturiertes Kombinieren aufgreifen.

3. Die LP legt die Poster «Darstellungsformen» im Kreis aus. Darauf finden sich nicht nur verschiedene Lösungswege, sondern auch die Lösungen zur eben bearbeiteten Aufgabe. Die SuS versuchen im Plenum zu erraten, wie die verschiedenen Darstellungsformen funktionieren.

Darstellungsformen thematisieren

1. Welche Darstellungsformen haben die SuS gewählt? Sie legen ihre Lösungswege zum passenden Poster.
2. Wurde kein Lösungsweg dargestellt? Wichtigkeit eines Lösungsweges thematisieren.
3. Die SuS versuchen im Plenum zu erraten, wie die verschiedenen Darstellungsformen funktionieren.
4. Die Schülergruppen erhalten nun ein Poster mit einer Darstellungsform und müssen eine Parallelaufgabe so lösen, wie es auf dem Poster dargestellt wird. Sie üben bereits das Präsentieren ihres Lösungsweges für später.

Mögliche Parallelaufgaben:

- > Markus, Anna und der Hund Frodo möchten ein Gruppenfoto von sich machen lassen...
- > Leonie hat eine blaue, eine rote und eine gelbe Perle. In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen, kann sie diese auf ihre Kette einfädeln?
- > Sebastian macht Mini-Fruchtspieße mit einer Erdbeere, einer Traube und einem Stück Ananas pro Spiess...

5. Die Gruppen präsentieren ihre Lösungswege. Anschliessend fragt die LP die ganze Klasse nach Vor- und Nachteilen dieser Darstellungsform.
6. Evtl. tauschen die Gruppen ihre Plakate aus und lösen nochmal eine Parallelaufgabe zur neuen Darstellungsform.
7. Die Poster werden sichtbar im Schulzimmer aufgehängt.

Trainieren, Spielen und Knobeln mit den weiteren Aufgabenkarten

Nun lösen die SuS individuell oder in Gruppen weitere Aufgabenkarten. Die SuS wählen dabei ihre Darstellungsformen selber und entdecken, welche sie mögen, sich eigenen oder unpraktisch sind.

Tipps für die Lehrperson

- > Es macht Sinn, diese der Reihe nach zu lösen und erst nach dem «Gruppenfoto 3» mit den «Phantasietieren 1» zu starten.
- > Als Hilfe für schwächere SuS gibt es «Schnipselbilder» (s. unten).

- > Aufgaben mit einer Glühbirne sind anspruchsvolle Zusatzaufgaben.
- > Es soll kein Anspruch sein, dass alle SuS alle Aufgaben lösen.
- > Am besten korrigiert nur die Lehrperson. Lösungsweg muss vorhanden sein und Lösung soll wenn möglich von SuS begründet werden.
- > Teilweise werden die Rechnungen sehr schwierig, daher dürfen durchaus auch Taschenrechner eingesetzt werden.
- > Bei schnellen Gruppen könnte man eine Lösung auch noch in anderen Darstellungsformen evtl. mit einer Parallelaufgabe verlangen.
- > Schnelle Gruppen könnten eigene Kombinatorikaufgaben erfinden.

Lehrmittelempfehlung «Daten, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit»

Kaufmann, S. (Hrsg.). (2010). *Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit: Box: 1-4*. Westermann.



Diese Box enthält 40 Aufgabenkarten (A5) zu den Themenbereichen Daten, Häufigkeiten (Kombinatorik) und Wahrscheinlichkeit. Die Aufgaben sind sowohl thematisch als auch in der Schwierigkeit aufbauend und sind kindgerecht und sehr ansprechend gestaltet.

Hornschuh, H.-D., & Sewerin, H. (2011). *Experimentieren mit Zahlen: Darstellen, kombinieren, würfeln*. elk



Dieses Elk-Angebot enthält 58 Aufgabenkarten, welche kopiert und auf A5 zugeschnitten werden. Die ersten Karten arbeiten mit Diagrammen und/oder verlangen eine eigene Datenerfassung. Danach geht es in die Kombinatorik hinein und schliesslich folgen Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit. Die Gestaltung ist einfach in schwarz-Weiss.

Quelle:

Herzog, M., Ehlert, A., & Fritz, A. (2017). Kombinatorikaufgaben in der dritten Grundschulklasse. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 38(2), 263–289. <https://doi.org/10.1007/s13138-017-0118-8>

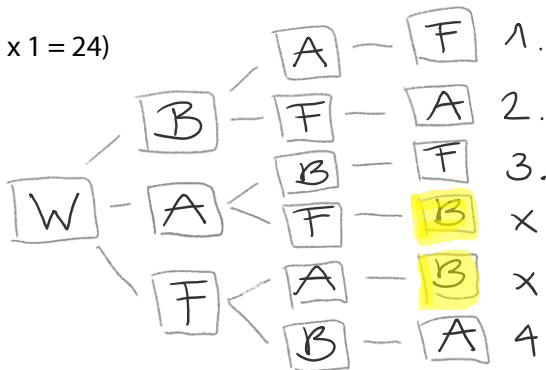
Lösungen

Gruppenfoto 1:

- a) 6 Kombinationen ($3 \times 2 \times 1 = 6$)
- b) evtl. in Kreissituation/Gruppen oder einer Lehrperson vorstellen lassen
- c) «Ich habe mit System gearbeitet» «Ich habe es öfters durchgemacht» ...

Gruppenfoto 2:

- a) 24 Kombinationen ($4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$)
- b) s. oben
- c) s. oben
- d) 12 Kombinationen →



Die zwei gelben Kombis werden ausgeschlossen, weil der Bär nie am Rand stehen möchte.

Für den Waschbären, den Affen und den Fuchs am linken Start, ergeben sich damit jeweils 4 Kombis.

Gruppenfoto 3:

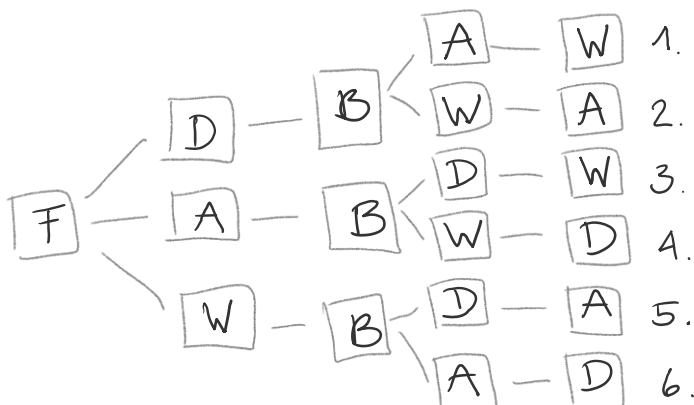
- a) 120 Kombinationen ($5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$)

b)

Tiere	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
Kombinationen	1	2	6	24	120	720	5'040	40'320	362'888	

- c)
 - Super Antwort: «Man multipliziert immer von der maximalen Anzahl Tiere jede Zahl runter bis 1»
 - Akzeptable Antwort: «In der Tabelle kann man immer die untere Zahl (Kombinationen) mit der oben rechts diagonalen Zahl (Tiere) multiplizieren und man erhält die Anzahl Kombinationen.» Hier können die SuS aber die Kombinationen für z.B. 16 Tiere nicht direkt berechnen. Sie müssen alle Zwischenschritte 10-15 ebenfalls durchführen.

- d) 24 Kombinationen ($4 \times 3 \times 1 \times 2 \times 1 = 24$)

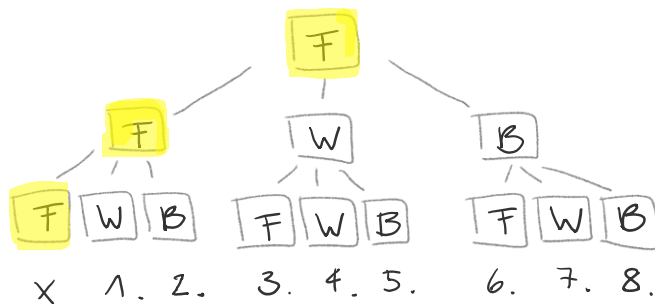


Diese sechs Kombinationen gibt es jeweils für den Waschbären, den Affen, den Dachs und den Fuchs am linken Start.

$4 \times 6 = 24$

Phantasietiere 1:

a) 24 Phantasietiere ($3 \times 3 \times 3 = 27 / 27 - 3$ ungültige Phantasietiere = 24)



Diese acht Kombinationen gibt es jeweils für den Waschbären-, den Bären- und den Fuchskopf.

b) Fubäbär, Fuschbär, Wabäruchs, ...

Phantasietiere 2:

a) 60 Phantasietiere ($4 \times 4 \times 4 = 64 / 64 - 4$ ungültige Phantasietiere = 60) oder das Baumdiagramm aufzeichnen. So findet man pro Tierkopf 15 Kombinationen. $15 \times 4 = 60$.

b)

Tiere	3	4	5	6	7	8	...
Anzahl Phantasietiere	24	60	120	210	336	504	

c) $N = \text{Anzahl Tiere}$ $N \times N \times N - N = \underline{\quad}$ $/ N^3 - N = \underline{\quad}$ z.B. $5 \times 5 \times 5 - 5 = 120$

Phantasietiere 3:

a) $N^6 - N = \underline{\quad}$ $15625 - 5 = 15620$ Phantasietiere

b) Nur noch der Bär hat alle seine Teile im Spiel und kann somit ein ungültiges Phantasietier verursachen. $3 \times 5 \times 4 \times 5 \times 4 \times 4 - 1$ ungültiges Phantasietier = 4799

Ohren - Dachs / Affe = 3

 Gesicht = 5

 Arme - Waschbär = 4

 Bauch = 5

 Beine - Waschbär = 4

 Füße - Fuchs = 4

Schnipselbilder



Gruppenfoto 1


Die drei Freunde der Waschbär, der Bär und der Fuchs möchten ein Gruppenfoto von sich machen lassen. Doch wie sollen sie sich nebeneinander hinstellen? Immer wieder tauschen sie ihre Plätze und haben grossen Spass.



- Wie viele Möglichkeiten (Kombinationen) gibt es für die drei Freunde, sich nebeneinander hinzustellen?
- Zeige mit deinem Lösungsweg wie du alle Kombinationen gefunden hast.
- Hast du auch sicher alle Kombinationen gefunden? Warum?

Gruppenfoto 2

Der Affe beobachtet die drei Freunde beim Fotografieren und möchte auch mitmachen.

- a.) Wie viele Möglichkeiten (Kombinationen) gibt es für die **vier** Freunde, sich nebeneinander hinzustellen?
- b.) Zeige mit deinem Lösungsweg wie du alle Kombinationen gefunden hast.
- c.) Hast du auch sicher alle Kombinationen gefunden? Warum?
- d.)  Wie viele Kombinationen mit vier Tieren gibt es, wenn der Bär nie am Rand stehen möchte?



Gruppenfoto 3

Nun kommt auch noch der Dachs dazu!

- Wie viele Möglichkeiten (Kombinationen) gibt es für die **fünf** Freunde, sich nebeneinander hinzustellen?
- Findest du heraus, wie viele Kombinationen es bei 1-... Tieren gibt?

Tiere	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
Kombinationen	1									



- Findest du eine Regel für jede Anzahl Tiere?



- Wie viele Kombinationen gibt es, wenn der Bär immer in der Mitte bleiben möchte?

Phantasietiere 1

Die drei Freunde betrachten ihre Fotos und erfinden ein Spiel. Sie schneiden ihre Fotos in drei Teile und legen mit den Körperteilen neue Phantasietiere. Das wird lustig!



Kopf

Oberkörper

Beine

Jedes Phantasietier muss wenigstens einen fremden Teil haben. Wenn alle Teile vom gleichen Tier sind, ist es kein Phantasietier.

- Wie viele verschiedene Phantasietiere können mit den Fotos des Waschbären, Bären und Fuchs entstehen?
- Welche Namen könnte man deinen Phantasietieren geben? Notiere mindestens drei Namen.

Phantasietiere 2

Die Tiere erfinden so lustige Phantasietiere, dass der Affe ihr lautes Lachen hört und auch dazu kommt. Nun möchte er auch mitmachen und seinen Kopf, Oberkörper und seine Beine dazulegen.

- a) Wie viele Phantasietiere entstehen, wenn der Affe auch mitmacht?
Die Spielregeln bleiben gleich wie bei «Phantasietiere 1».



- b) Findest du die Anzahl möglicher Phantasietiere bei 3 - ... Tieren?

Tiere	3	4	5	6	7	8	...
Anzahl Phantasietiere							



- c) Findest du eine Regel für jede Anzahl Tiere?



Phantasietiere 3

Nun machen alle fünf Freunde mit und schneiden ihre Fotos in sechs einzelne Stücke.



Ohren

Gesicht

Arme

Bauch

Beine

Füße

a) Wie viele verschiedene Phantasietiere können nun entstehen?



b) Die Party wird immer lustiger und plötzlich sehr chaotisch. Der Dachs und der Affe verlieren ihre Ohren, der Fuchs zerschneidet seine Füße und der Waschbär nimmt seine Arme und Beine heimlich aus dem Spiel. Wie viele Phantasietiere gibt es jetzt noch?

Ich finde meine Ohren
nicht mehr!

Wie finde ich alle Kombinationen?

Zeichnung

Netz

Baumdiagramm

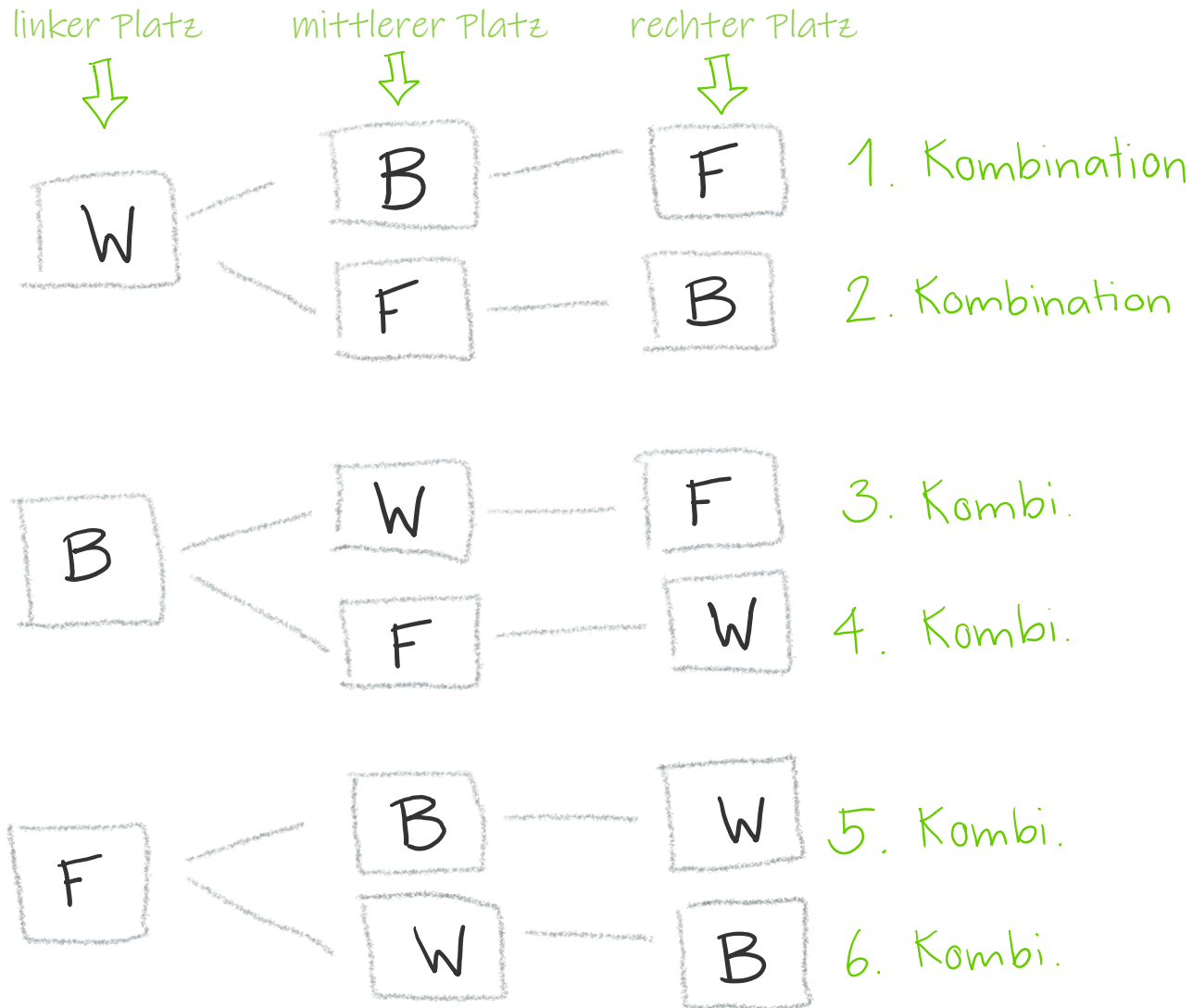
Tabelle

Geheimschrift

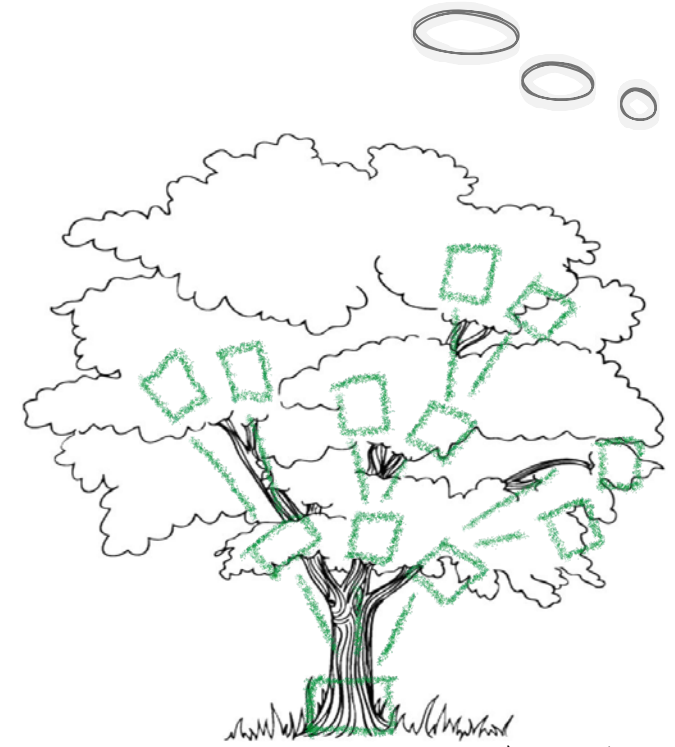


Baumdiagramm

Wir stellen alle möglichen Kombinationen in einem Baumdiagramm dar. Danach können wir die Lösungen ablesen.



Wie stehen die Tiere bei Kombination 3 von links nach rechts?



Zeichnen

Wir malen alle möglichen Kombinationen auf. Dabei beachten wir, dass wir immer so wenig wie möglich verändern.




1. Kombination: 
2. Kombination: 
3. Kombination: 
4. Kombination: 
5. Kombination: 
6. Kombination: 

Meine Zeichnungen sind
viel einfacher und
trotzdem gut!



Tabelle

Wir notieren unsere Ergebnisse in einer Tabelle. Dabei schreiben wir Zahlen für die verschiedenen Kombinationen.

	Linker Platz	Mittlerer Platz	Rechter Platz
 Waschbär	1 2	3 6	4 5
 Bär	3 4	1 5	2 6
 Fuchs	5 6	2 4	1 3

Aha!
Die zweite Kombination
von links nach rechts ist:
Waschbär-Fuchs-Bär

Wie lautet die
vierte Kombination
von links nach
rechts?

Geheimschrift

Wir wählen zuerst eine Geheimschrift mit Ziffern, Symbolen, Buchstaben, Farben oder vielem mehr.

Danach notieren wir uns alle möglichen Kombinationen. Wir achten darauf, immer möglichst wenig zu verändern.

Ziffern: 1=Waschbär 2=Bär 3=Fuchs

123 213 321

132 231 312

Symbole: Δ =Waschbär \circ =Bär \square =Fuchs

$\Delta\circ\square$ $\circ\Delta\square$ $\square\circ\Delta$




$\Delta\square\circ$ $\circ\square\Delta$ $\square\Delta\circ$




Buchstaben: W=Waschbär B=Bär F=Fuchs

WBF BWF FBW

WFB BFW FWB

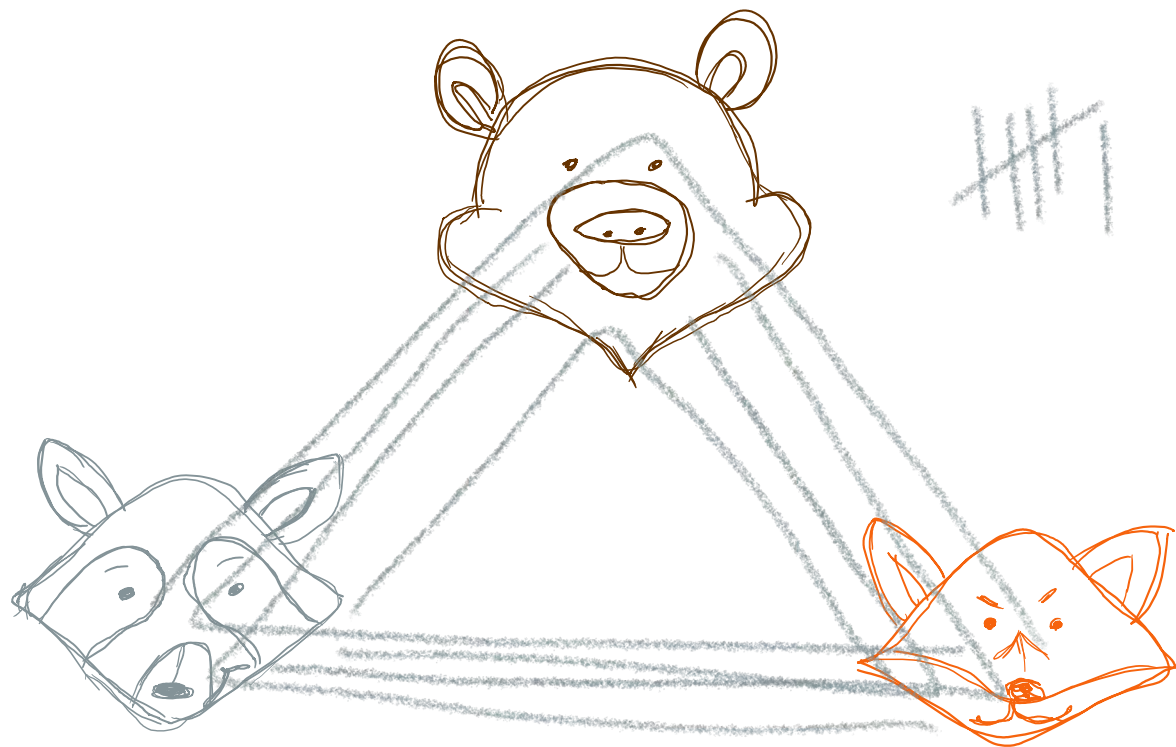
Farben:  = Waschbär  = Bär  = Fuchs

Netz

Wir zeichnen die drei Tiere und fahren jede Kombination mit einem Stift nach. Dabei sprechen wir unsere Kombinationen aus und zählen sie mit Strichen. Am besten geht das zu zweit.



Aber bitte nur
Netze ohne
Spinnen!

