Materialien zur Bildungsforschung | Nr. 10/2018

Lehre
Weiterbildung
Forschung

Mathematisches Argumentieren im Kindergarten fördern

Eine Handreichung

Esther Brunner

Pädagogische Hochschule Thurgau.

Impressum

Herausgeberin
Pädagogische Hochschule Thurgau
Unterer Schulweg 3
Postfach
8280 Kreuzlingen 2
Tel. +41 (0)71 678 56 56
info@phtg.ch
phtg.ch

Autorin
Esther Brunner

Bilder
© PHTG

Dank
Ein herzlicher Dank geht an die Stiftung «the cogito foundation» für die grosszügige finanzielle Unterstützung des Forschungsprojekts.
Dem Förderverein der PHTG sei an dieser Stelle für die Finanzierung der Druckkosten gedankt.

Inhalt

Pädagogische Hochschule Thurgau
Materialien zur Bildungsforschung
Nr. 10/2018
Seite 3

1. IvMAiK – ein Projekt für die Praxis

Esther Brunner

Im Rahmen des von der Stiftung «The Cogito Foundation» geförderten Forschungsprojekts «IvMAiK» (**I**nterventionsstudie zum **M**athematischen **A**rgumentieren **i**m **K**indergarten) wurden an der Pädagogischen Hochschule Thurgau (PHTG) während eines Schuljahres zusammen mit neun Kindergartenlehrpersonen Lernumgebungen zum mathematischen Argumentieren im Kindergarten entwickelt. Dazu wurden von der Projektleitung vier verschiedene prototypische Anlässe zum mathematischen Argumentieren kreiert und jeweils anhand eines Bilderbuchs für die Umsetzung in der Praxis konkretisiert. Die vier prototypischen Anlässe zum mathematischen Argumentieren wurden anschliessend von den Lehrpersonen für ihre eigene Unterrichtspraxis genutzt. Zu jedem der vier Anlässe wurden eigene Umsetzungen geplant und in der Praxis durchgeführt. Die eigene Umsetzung wurde von den Kindergartenlehrpersonen dokumentiert. Damit liegen reichhaltige praxisnahe Materialien zur Förderung mathematischen Argumentierens im Kindergarten vor, die in dieser Handreichung gesammelt sind. In Abschnitt 2 werden zunächst kurz theoretische Grundlagen zum mathematischen Argumentieren erläutert. Es folgen Überlegungen und Praxisbeispiele zur Bedeutung von «Warum-Fragen» (Abschnitt 3). Anschliessend werden die vier prototypischen Anlässe zum mathematischen Argumentieren in der Übersicht kurz vorgestellt (Abschnitt 4). Es folgen dann die Konkretisierungen jedes dieser vier Anlässe je am Beispiel eines Bilderbuchs sowie in der Durchführung der Kindergartenlehrpersonen in ihrer Praxis (Abschnitte 5–8).

Jeder der einzelnen Texte wurde möglichst kurz gehalten, um sich rasch einen Überblick verschaffen zu können und eigene Ideen für eine Durchführung von Anlässen zum mathematischen Argumentieren zu entwickeln. Diese Handreichung möchte dazu anregen, mathematisches Argumentieren auch im Kindergarten alters- und stufengerecht zu fördern. Dazu wünschen wir gutes Gelingen und viel Freude.

2. Mathematisches Argumentieren im Kindergarten: Theoretische Grundlagen

Esther Brunner

2.1. Mathematisches Argumentieren: Was ist das?

Mathematisches Argumentieren ist ein vielschichtiger, anspruchsvoller Prozess, der eingebettet ist in eine soziale Situation und ein Gespräch (Brunner, 2014). Es geht dabei darum, Gewissheit zu erlangen, ob eine Behauptung stimmt oder nicht. Diese Sicherheit gewinnt man durch das Finden und Aufdecken von Zusammenhängen und Gesetzmässigkeiten, das Erforschen und Verstehen von mathematischen Mustern und Regelmässigkeiten. Leitend für diese Suche ist die «Warum-Frage»: Warum gilt etwas? Warum ist das so und warum ist dieses Muster so korrekt oder eben falsch? Und warum gilt dies immer? Selbst wenn angenommen wird, dass eine Behauptung stimmt, löst die Warum-Frage das Suchen von Gründen dafür aus. Dabei geht es um das Absichern und Überprüfen einer Behauptung oder um das Widerlegen und Zurückweisen. Mathematisches Argumentieren hat somit zwei verschiedene Seiten: diejenige des Nachvollziehens von vorgebrachten Argumenten und diejenige des aktiven Konstruierens von solchen.

Beim mathematischen Argumentieren spielen vier Teilkompetenzen eine zentrale Rolle:

1. Man muss eine mathematische Struktur mit ihren wesentlichen sie bestimmenden Elementen erkennen können.
2. Man muss die Struktur beschreiben lernen.
3. Man muss erklären können, warum diese Struktur auftritt und begründen können, wieso sie gilt.
4. Und schliesslich muss man in der Lage sein zu verallgemeinern, also zu begründen, warum etwas notwendigerweise immer so sein muss.

Auf dieser Basis können dann Vorhersagen getroffen werden (Brunner, 2016).

Mathematisches Argumentieren unterscheidet sich von Argumentieren in anderen Kontexten wie beispielsweise im Alltag: Während im Alltag verschiedenartige Argumente als Antwort auf Warum-Fragen zulässig sind, müssen beim mathematischen Argumentieren die Argumente aus der Mathematik selbst stammen. Kinder müssen die Warum-Frage mit mathematischen Mitteln beantworten lernen, also mit Zahlen, mit Formen, mit mathematischen Objekten, Merkmalen und Beziehungen.

2.2. Mathematisches Argumentieren: Warum soll man das tun?

Mathematisches Begründen, insbesondere im Sinne streng logischen Beweisens, gilt als Kern der Mathematik überhaupt (Heintz, 2000) und wird auch in den Bildungsstandards und Lehrplänen (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016; KMK, 2005) als wichtige zu erwerbende Kompetenz aufgeführt.
Mathematisches Argumentieren gehört zum Spektrum des Begründens, auf dessen einer Seite alltägliches Begründen angesiedelt ist und auf der anderen Seite das streng logische Beweisen steht (Brunner, 2014). Dabei gilt insbesondere das Beweisen als hoch anspruchsvoll. Im Verlauf der mathematischen Bildung sollen die Lernenden deshalb schrittweise mit unterschiedlichen Formen mathematischen Begründens vertraut gemacht werden und lernen, mathematische Sachverhalte und Gesetzmässigkeiten nicht nur anzuwenden, sondern auch zu begründen, warum diese gelten. Dies trifft auch für die frühe Bildungsstufe, den Kindergarten und die Schuleingangsstufe zu.

2.3. Mathematisches Argumentieren: Was sagt der Lehrplan dazu?

Mathematisch argumentiert wird in drei grossen Inhalts- bzw. Kompetenzbereichen: im Bereich «Zahl und Variable», im Bereich «Form und Raum» sowie im relativ umfangreichen Bereich von «Grössen, Funktionen Daten und Zufall». Im neuen Thurgauer Lehrplan (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016) werden für diese drei Kompetenzbereiche verschiedene Kompetenzen beschrieben, die alle Schülerinnen und Schüler im Verlauf ihrer mathematischen Grundbildung in der Volksschule erwerben müssen.

Es sind dies im Kompetenzbereich «Zahl und Variable» folgende:

1. Die Schülerinnen und Schüler können Zahl- und Operationsbeziehungen sowie arithmetische Muster erläutern, überprüfen, begründen.
2. Sie können Aussagen, Vermutungen und Ergebnisse zu Zahlen und Variablen erläutern, überprüfen, begründen.
3. Die Schülerinnen und Schüler können beim Erforschen arithmetischer Muster Hilfsmittel nutzen.

Für den Kompetenzbereich «Form und Raum» lauten die Kompetenzbeschreibungen wie folgt:

1. Die Schülerinnen und Schüler können geometrische Beziehungen, insbesondere zwischen Längen, Flächen und Volumen, erforschen, Vermutungen formulieren und Erkenntnisse austauschen.
2. Sie können Aussagen und Formeln zu geometrischen Beziehungen überprüfen und mit Beispielen belegen und begründen.

Im Kompetenzbereich «Grössen, Funktionen, Daten und Zufall» gelten folgende Kompetenzbeschreibungen:

1. Die Schülerinnen und Schüler können zu Grössenbeziehungen und funktionalen Zusammenhängen Fragen formulieren, diese erforschen sowie Ergebnisse überprüfen und begründen.
2. Sie können Sachsituationen zur Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit erheben, ordnen, darstellen, auswerten und interpretieren.

Diese Kompetenzbeschreibungen liegen dem mathematischen Argumentieren in der ganzen Volksschule zugrunde. Wie diese entwickelt werden sollen und über welche Kompetenzen die Lernenden zu einem bestimmten Zeitpunkt verfügen können müssen, regeln die genauen Beschreibungen der einzelnen Bildungszyklen sowie der Grundanspruch bzw. der Orientierungspunkt. Im Kanton Thurgau wurde für den Kindergarten ebenfalls ein Orientierungspunkt gesetzt, der regelt, welche Kompetenzstufen Kindergartenlehrpersonen bis zum Ende des Kindergartens mit den Kindern bearbeitet haben sollen. Der Orientierungspunkt richtet sich somit ans Programm der Lehrpersonen, während der Grundanspruch definiert, was die Schülerinnen und Schüler zu einem bestimmten Zeitpunkt minimal können müssen.

Betrachtet man die Formulierungen des Orientierungspunkts am Ende des Kindergartens zum Argumentieren, wird deutlich, dass es um einen altersgemässen ersten Schritt auf dem Weg des Kompetenzerwerbs zum mathematischen Argumentieren geht. So sollen die Kinder beispielsweise in der Lage sein, Muster mit Anzahlen oder Formen zu bilden, sich diese einzuprägen, abzudecken und weiterzuführen oder Aussagen dazu an konkretem Material zu überprüfen.

2.4. Literatur

Amt für Volksschule des Kantons Thurgau. (2016). *Lehrplan Volksschule Thurgau. Mathematik*. Frauenfeld: Amt für Volksschule des Kantons Thurgau.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Heidelberg: Springer.

Brunner, E. (2016). Bin ich ein Teil von dir? Kindergartenkinder lernen mathematisch argumentieren. *4 bis 8*, *2016* (8), 37–39.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin.* Wien: Springer.

KMK. (2005). *Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz. Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung.* München: Luchterhand.

3. Warum-Fragen

3.1. Zur Bedeutung von Warum-Fragen beim Argumentieren

Esther Brunner

Mathematisches Argumentieren braucht als Ausgangslage die fehlende Gewissheit, ob etwas so *ist* und *immer* so *sein muss* oder ob es auch anders sein könnte. Während Fragen wie «Ist das so?» oder «Stimmt das?» auf die Überprüfung des Sachverhalts abzielen, fordert die Frage nach dem «Warum» zum Begründen eines vermuteten oder gefundenen Zusammenhangs auf. «Warum ist das so?» verlangt danach zu überlegen, wie Dinge und Strukturen grundsätzlich zusammenhängen. Warum-Fragen gelten als kognitiv aktivierend, das heisst, sie fördern das Nachdenken und das Suchen von Zusammenhängen und damit das tiefe Verstehen und die Einsicht. Darauf weisen auch die neuen Lehrpläne hin, wenn sie etwa festhalten, dass es im Mathematikunterricht auch darum geht, «die Fähigkeiten zum Erkennen von Zusammenhängen und Regelmässigkeiten, zum Transfer, zur Umkehrung der Gedankengänge, zur Abstraktion, zur Logik und zum folgerichtigen Denken» (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016, S. 3) zu fördern. Fragenstellen generell gilt zudem als wichtige Lernstrategie (Neber, 2006), und zwar deshalb, weil dies die Konstruktion von Wissen, die lernorientierte Motivation sowie metakognitive Fähigkeiten fördert.

Warum-Fragen sind mit dem Finden und Erzählen von Weil-Geschichten verbunden: Sobald ein Zusammenhang gefunden und eine Einsicht in eine bestimmte mathematische Struktur erlangt wurde, kann erzählt werden, warum dies so ist und immer so sein muss. Dadurch ermöglichen Antworten auf Warum-Fragen auch immer eine grosse persönliche Befriedigung, die Zufriedenheit, die sich einstellt, wenn man sicher ist, dass etwas so *sein muss* – und zwar zwingenderweise.

Weil beim mathematischen Argumentieren die Argumente aus der Mathematik selbst stammen müssen, müssen die Antworten auf die Warum-Frage auf mathematische Mittel zurückgreifen, also auf Zahlen, Formen, auf mathematische Objekte, Merkmale und Beziehungen. Es geht deshalb darum, eine *mathematische* Warum-Frage mit einer *mathematischen* Weil-Geschichte beantworten zu lernen.

3.2. Literatur

Amt für Volksschule des Kantons Thurgau. (2016). *Lehrplan Volksschule Thurgau. Mathematik*. Frauenfeld: Amt für Volksschule des Kantons Thurgau.

Neber, H. (2006). Fragenstellen. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Hrsg.), *Handbuch Lernstrategien* (S. 50–58). Göttingen: Hogrefe.

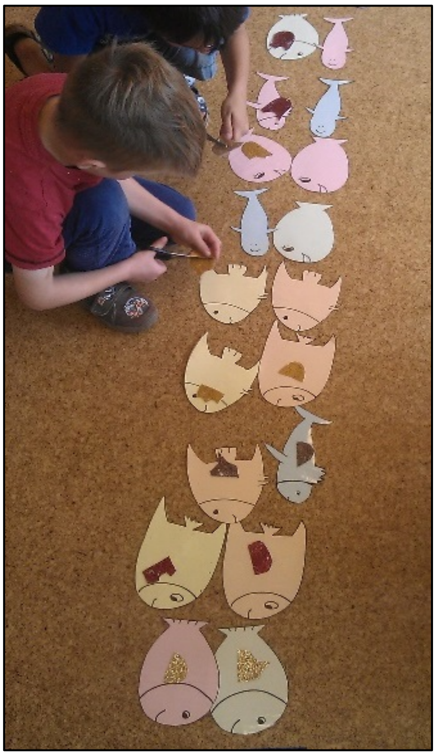
3.3. Beispiele aus der Praxis

Janine Rüdisüli, Janina Baumgartner, Jasmin Bürgy, Evi Fischer, Lucy Gappisch, Tanja Hartmann, Jasmin Karrer, Deborah Limi, Melissa Maurer, Bettina Mösli und Esther Brunner

Argumentieren mit Bilderbüchern

Warum kann man auf einen Blick sehen, dass der kleine Pinguin mehr Fische gefangen hat als seine Mama? Warum ist diese Figur ein Viereck und kein Kreis? Der «Samichlaus» will jedem gleich viele Nüsschen geben. Warum bekommt jedes Tier zwei Nüsse? In Kindergärten wird die Warum-Frage in ganz unterschiedlichen Settings genutzt, um mathematisches Argumentieren bei den Kindern anzuregen.

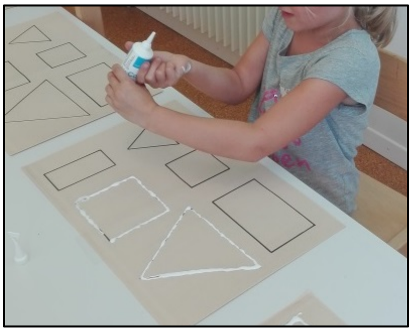
So werden beispielsweise bekannte Bilderbücher zum Gesprächsanlass für mathematisches Argumentieren. Jeden Tag trifft sich der Regenbogenfisch mit einigen Freunden zum Spielen. Die anderen Fische wollen so gerne auch wunderbare Glitzerschuppen haben! So verteilt der Regenbogenfisch seine Schuppen und gibt dabei jedem seiner Freunde gleich viele. Bei 12 Schuppen bekommt jeder der 12 Fische 1 Schuppe. Aber warum ist das so? Und wie ist es, wenn am nächsten Tag nur 6 Fische zum Spielen kommen und Glitzerschuppen wollen? Warum ist das so? Wie viele Glitzerschuppen hat der Regenbogenfisch am Abend, wenn die Fischfreunde ihm die Schuppen wieder zurückgeben? Und wieso weiss man das? An einem Sonntag kommen besonders viele Freunde. 24 Fische möchten zusammen spielen. Die Kinder finden auch hier eine Lösung. Sie beginnen, die Schuppen auseinanderzuschneiden, oder legen die Fische so hin, dass 2 Fische immer zusammen schwimmen und sich 1 Schuppe teilen können. Jetzt brauchen sie der Kindergartenlehrperson nur noch zu erklären, wieso sie die Schuppen zerschneiden oder die Fische so hinlegen. In einer solchen Sequenz können mithilfe von Warum-Fragen neben dem mathematischen Tun auch das mathematische Argumentieren gefördert werden.



Einen Schritt weiter gehen

Nicht nur Bilderbücher können als Anlass zum mathematischen Argumentieren genutzt werden. Bei fast jedem mathematischen Thema können die Kinder mit Warum-Fragen zum mathematischen Argumentieren angeregt werden. In einem Kindergarten lautet das Thema «Benennen von Formen». Die Kindergartenlehrperson gestaltet verschiedene Lernangebote, in denen sich die Kinder mit den Formen auseinandersetzen können. Kreise, Quadrate, Rechtecke und Dreiecke werden mit Weissleim nachgezeichnet, mit Plättchen gelegt und mit dem Finger in den Sand gezeichnet. Immer wieder werden die Formen von der Kindergartenlehrperson benannt. Bald können auch die Kinder die Formen richtig benennen.

Auf Fragen, wie eine bestimmte Form heisst, können die Kinder nun antworten. Anstatt die Lerneinheit mit der richtigen Antwort der Kinder als beendet zu sehen, kann an diesem Punkt an das aufgebaute Wissen der Kinder angeknüpft und nachgefragt werden, warum diese Figur denn jetzt Quadrat heisst. Die Kinder werden aufgefordert, die Begründung zu formulieren und somit zu argumentieren. «Es isch es Quadrat will s vier Egge hät. Und will s so isch, isch, dass kei so (Handbewegung)… so zwei langi Teili hät», war eine Erklärung eines Kindes.



Auch beim Thema Muster kann neben dem mathematischen Tun das mathematische Argumentieren mit Warum-Fragen gefördert werden. In einem ersten Schritt werden Muster erkannt, weitergeführt, selbst gelegt oder gezeichnet. In einem nächsten Schritt kann aus dem Tun ein Gespräch darüber entstehen, warum man das genau auf diese Weise tut. Beispielsweise fragt eine Kindergartenlehrperson, was das Kind als Nächstes legen würde und warum. Das Kind begründet, warum das Muster auf diese Weise fortgeführt wird. Ein anderes Kind wird gefragt: «Könntest du nicht ein rotes Quadrat (wäre falsch) an dieser Stelle legen? Warum nicht?» Ob im Klassenverband oder bei der Arbeit mit einem Kind, die Warum-Fragen können in unterschiedlichen Settings gestellt werden.

Mathematisches Argumentieren beim Znüniessen?

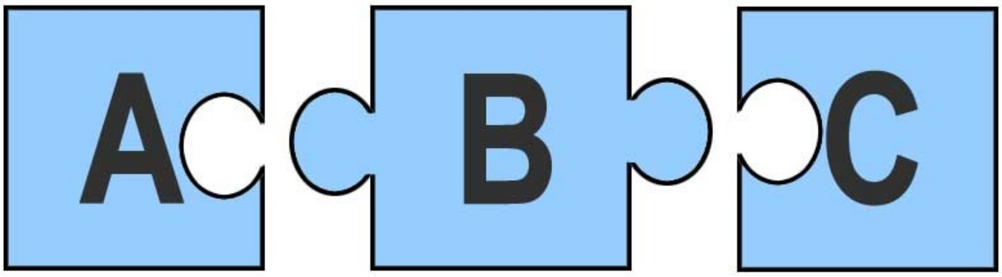
Sogar der Znüni kann mithilfe von Warum-Fragen zum Anlass für mathematisches Argumentieren werden. Die Kindergartenlehrperson holt eine Schale mit 20 Apfelschnitzen. Bekommt jetzt jedes Kind ein Apfelstückchen? Warum oder warum nicht? In solchen Situationen ist es oft so, dass die Kinder die Frage nicht nur formulieren, sondern oftmals auch handlungsbasiert argumentieren und zeigen, warum es so ist und nicht anders.

3.4. Sprachliche Unterstützung durch Argumentiersteine

Esther Brunner und Evi Fischer

Argumentierpuzzle

Um zu argumentieren, brauchen wir spezifische sprachliche und logische Kompetenzen, welche die Kinder zuerst erwerben müssen. Da es den Kindern erfahrungsgemäss oft schwerfällt, eine vollständige Begründung in Form eines ganzen Satzes zu bilden, ist es sinnvoll, mathematisches Argumentieren auch auf sprachlicher Ebene zu üben. Dazu eignet sich die Einführung von drei Teilen eines Arguments in Form von Puzzleteilen:



Behauptung weil Begründung

Die Lehrperson modelliert eine vollständige Begründung, indem sie jeweils das entsprechende Puzzleteil legt: «Das ist ein Viereck (Puzzleteil A: Behauptung), weil (Puzzleteil B: Verknüpfung) es vier Ecken hat (Puzzleteil C: Begründung). Die Kinder verwenden anschliessend für ihre eigenen Begründungen diese Puzzleteile ebenfalls.

4. Zur Förderung frühen Argumentierens

Esther Brunner

4.1. Aufbauen auf den Voraussetzungen der Kinder

Mathematisches Argumentieren kann bereits in der frühen Bildungsstufe wie dem Kindergarten oder der Schuleingangsstufe gefördert werden. Bedeutsam ist dabei, dass dies in einer der Altersstufe angemessenen Weise erfolgt und dass die Förderung auf die Voraussetzungen der Kinder Bezug nimmt. Im Hinblick auf die entwicklungspsychologischen Voraussetzungen gilt es besonders zu beachten, dass vier- bis sechsjährige Kinder Informationen noch stark selektiv aufnehmen und dass der Umfang ihres Arbeitsgedächtnisses sowie ihr verfügbares Wissen über die Welt (und die Mathematik) noch nicht sehr gross sind (Hasselhorn, 2005). Es braucht deshalb zum einen solide mathematische Erfahrungen der Kinder, auf deren Basis anschaulich argumentiert werden kann. Und zum anderen muss die Lehrperson den Blick der Kinder auf Merkmale und Strukturen lenken, die für die Argumentation entscheidend sind. Dies kann sowohl im Rahmen einer geführten Aktivität als auch während der individuellen Lernberatung erfolgen.

4.2. Didaktische Umsetzung: Vier prototypische Anlässe zum Argumentieren

Im Kindergarten und in der frühen Bildungsstufe wird didaktisch oft mit Rollenspielen, mit Bilderbüchern und Geschichten gearbeitet. Diese bilden einen thematischen Rahmen für das (mathematische) Tun, der auch für die Förderung frühen Argumentierens genutzt werden kann. Für die Förderung mathematischen Argumentierens im Kindergarten wurden im Rahmen des Forschungsprojekts «IvMAiK» der PHTG (Brunner, 2016) deshalb anhand von Bilderbüchern vier prototypische Anlässe entwickelt, die zum Argumentieren herausfordern. Es sind dies:

1. das Erzählen von vier unterschiedlichen Geschichten, die den Prozess des Argumentierens verkörpern (Abschnitt 5),
2. das Erzeugung einer Meinungsverschiedenheit oder eines Streits (Abschnitt 6),
3. das Suchen von Fehlern (Abschnitt 0) und schliesslich
4. das Erzählen und Aufdecken von Lügengeschichten (Abschnitt 0).

In diesen vier prototypischen Situationen muss argumentiert werden, um zu einer Lösung bzw. einer Antwort gelangen zu können. Diese vier prototypischen Situationen werden in den folgenden Kapiteln jeweils zunächst vorgestellt, didaktisch am Beispiel je eines Bilderbuchs ausgeleuchtet und anschliessend durch kurze Eindrücke aus der Umsetzung in der Praxis illustriert.

4.3. Literatur

Brunner, E. (2016). IvMAiK – Intervention zum Mathematischen Argumentieren im Kindergarten: Projektbeschreibung.

http://www.phtg.ch/forschung/mathematikdidaktik/aktuelle-projekte/ivmaik-intervention-zum-mathematischen-argumentieren-im-kindergarten/.

Hasselhorn, M. (2005). Lernen im Altersbereich zwischen 4 und 8 Jahren: Individuelle Voraussetzungen, Entwicklung, Diagnostik und Förderung. In T. Guldimann & B. Hauser, (Hrsg.), *Bildung 4- bis 8-jähriger Kinder* (S. 77–88). Münster: Waxmann.

5. Unterrichtsvorschlag I: Vier Geschichten erzählen

5.1. «Bin ich ein Teil von dir?» Kindergartenkinder lernen mathematisch argumentieren

Esther Brunner

(Erschienen 2016 in der Zeitschrift 4 bis 8/8, 37-39; mit freundlicher Genehmigung der Zeitschrift zum Abdruck im Rahmen dieser Handreichung)

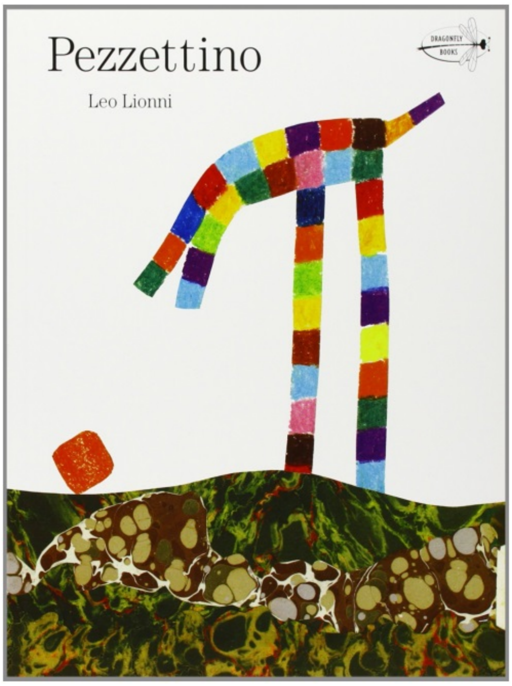


Abbildung 1: Bilderbuch Pezzettino (Lionni,2004)

«Bin ich ein Teil von dir?» fragt der kleine Pezzettino alle, denen er im Verlauf der Geschichte begegnet. Pezzettino, die Hauptfigur aus dem gleichnamigen Bilderbuch von Leo Lionni (2004), ist ein kleines, oranges Quadrat und versteht sich als Stückchen, als Teil eines Grösseren. Im Verlauf seiner Reise durch das Bilderbuch sucht er bei den anderen Figuren, die alle aus lauter kleinen Quadraten bestehen, ob er Teil von ihnen sei.

Mathematisch regt das Bilderbuch deshalb zum einen zur Förderung der wichtigen Teil-Ganzes-Beziehung an und zur Ausdifferenzierung und Wahrnehmung verschiedener Formen, die in einzelne Teile zerlegt werden können. Und zum anderen eignet sich das Bilderbuch hervorragend, um mathematisch argumentieren zu lernen. Pezzettinos Fragen müssen nämlich von den anderen Figuren beantwortet werden, und insbesondere das abschlägige «Nein» will begründet werden. Im Bilderbuch selbst geben die Figuren, auf die Pezzettino trifft, inhaltliche Gründe an. So sagt beispielsweise «der, der rennt»: «Erlaube mal, … glaubst du, ich könnte rennen, wenn mir auch nur ein einziges Stück fehlte?» Aber Pezzettino hat durchaus plausible, für die Kinder leicht sichtbare Gründe, warum er glaubt, er könnte ein Teil der anderen Figuren sein: Die anderen Figuren bestehen nicht nur aus lauter kleinen Quadraten, sondern in jeder der anderen Figuren ist mindestens ein kleines, oranges Quadrat – und damit die Abbildung von Pezzettino – enthalten. Pezzettinos Überlegungen sind also sehr viel mehr mathematische Begründungen, als sie die anderen Figuren zur Antwort geben.

Alltägliche und mathematische Argumente

Argumentieren und Begründen kann also – wie dies die Kontrahenten im Bilderbuch sehr schön zeigen – ganz unterschiedlich erfolgen: Argumente können aus dem Alltag oder der Erfahrung stammen, wie dasjenige von «dem, der rennt». Diese Argumente benötigen Weltwissen und setzen entsprechende Erfahrungen voraus. Anders verhält es sich mit mathematischen Argumenten oder mathematischen Begründungen (Brunner, 2014). Auf solche zielt Pezzettino ab, indem er eine bestimmte (mathematische) Struktur oder ein Muster – das kleine, orange Dreieck – verallgemeinert und damit nicht mehr als Einzelfall sieht, sondern als eine Struktur mit bestimmten, gleichbleibend gültigen Merkmalen (quadratisch, klein und orange) erfasst. Diese Struktur sucht er auf seiner Reise im Gegenüber. Er erkennt in «dem, der rennt» gleich mehrere kleine, orange Quadrate und könnte damit – mathematisch gesehen – tatsächlich und gleich mehrfach Teil von «dem, der rennt» sein.

Ein Prozess in vier Schritten

Mathematisch argumentieren zu lernen, ist sehr anspruchsvoll und gleichermassen sehr bedeutsam. Es verlangt das Abstrahieren und Fokussieren auf relevante Merkmale bei gleichzeitiger Ausblendung von irrelevanten. Konstruiert werden müssen dabei mathematische Argumente und eigentliche Begründungsketten im Sinne von «Warum-Weil-Geschichten». Dieser Prozess besteht aus mehreren Schritten, die beschrieben werden können:

1) Zunächst geht es darum, die Struktur mit ihren Merkmalen zu erkennen.
2) In einem weiteren Schritt muss die Struktur beschrieben werden können, um ebendiese relevanten Merkmale sichtbar zu machen.
3) Dies führt zur Warum-Frage, die darauf abzielt herauszufinden, warum das Muster oder die Struktur so und nicht anders ist bzw. sein kann.
   In diesem Schritt steckt eine Verallgemeinerung, die wegführt vom einzelnen Beispiel hin zum allgemein gültigen Fall und damit dem «es ist immer so, wie…» oder noch deutlicher zum «es muss immer so sein, weil ...» hinführt. Dieser Schritt enthält die Erkenntnis, dass etwas notwendigerweise immer gelten muss, und die Antwort darauf, warum dies so ist. Damit unterscheidet sich gerade dieser Schritt sehr deutlich vom Argumentieren im Alltag, bei dem es ausreichend ist, plausible Gründe anzugeben, die die anderen überzeugen und in gewisser Weise stichhaltig sind. «Der, der rennt» gibt einen solch plausiblen Grund an, warum Pezzettino nicht Teil von ihm sein kann. Er sagt, dass er sonst nicht rennen könnte. Das ist stichhaltig, hat aber nichts mit einer Verallgemeinerung zu tun, sondern bleibt an dieses einzelne Beispiel gebunden und könnte durchaus auch bestritten werden.
4) Ist die Verallgemeinerung vollzogen und begründet, warum etwas notwendigerweise immer so sein muss, dann können auf dieser Basis auch Vorhersagen für weitere Fälle getroffen werden. Vorausgesagt kann nun beispielsweise werden, dass und warum der gefundene Zusammenhang auch für alle weiteren Fälle gilt, für den hundertsten oder den zweiunddreissigsten usw. Und diese Voraussagen können auch überprüft werden. Das ist eine Tätigkeit, die man später beim Beweisen in der Mathematik als Validierung bezeichnet.

Vier unterschiedliche Geschichten erzählen

Didaktisch lassen sich diese vier Schritte des mathematischen Argumentationsprozesses als vier unterschiedliche Geschichten erzählen, die in unterschiedliche Aktivitäten münden:

1) Die «Das-ist-es-Geschichte»: Die Struktur soll erkannt werden. Pezzettino sieht sich bzw. das kleine, orange Quadrat in «dem, der rennt». Die «Das-ist-es-Geschichte» stellt also den Fokus auf das Muster ein.
2) Die «Es-geht-so-Geschichte»: Sie zielt auf das Beschreiben der Struktur ab. Pezzettino kann sagen, dass er dieses eine kleine, orange Quadrat in «dem, der rennt» sieht. Er erkennt es nicht nur, sondern kann es auch mit den zentralen Merkmalen beschreiben.
3) Die «Es-geht-so-weil-Geschichte»: Sie fokussiert auf das Erklären der Struktur oder des Zusammenhangs. Jetzt kann Pezzettino nicht nur sagen, dass er dieses kleine, orange Quadrat in «dem, der rennt» entdeckt und dass es sich dabei um die gleiche Figur mit den gleichen Merkmalen handelt, sondern zudem, dass also die beiden Teile vollständig kongruent, aber nicht identisch sind. Das heisst, man kann das kleine, orange Quadrat von Pezzettino auf das kleine, orange Quadrat in «dem, der rennt» legen und sieht, dass die beiden Figuren gleich sind. Folglich ist Pezzettino Teil von «dem, der rennt». Die «Es-geht-so-weil-Geschichte» ist erzählt.
4) Die «Weil-es-so-geht-MUSS-Geschichte» oder die «Immer-wenn-dann-Geschichte»: Pezzettino hat die beiden kongruenten Figuren erkannt, beschrieben und den Zusammenhang zwischen den beiden begründet und kann nun Vorhersagen treffen, zum Beispiel: «Immer wenn eine Figur deckungsgleich in einer anderen enthalten ist, ist die einzelne Figur Teil der grösseren.» Folglich muss Pezzettino auch in «dem, der fliegt» oder in «dem, der schwimmt» enthalten sein, sofern diese das kleine, orange Quadrat enthalten.

Aktivitäten und Gespräch

Ob Pezzettino und die anderen Figuren aus Quadraten gezeichnet, gestempelt, gelegt oder aus Steckwürfeln oder Bauklötzen zusammengebaut werden, spielt für den Erkenntnisprozess keine Rolle. Wichtig ist, dass die Aktivitäten dazu genutzt werden, um diese vier oben beschriebenen unterschiedlichen Geschichten zu erzählen. Dabei kann die Ausgangslage – in unserem Fall also die Merkmale von Pezzettino – variiert werden: Pezzettinos jüngere Schwester ist vielleicht ein kleines, grünes rechtwinkliges Dreieck (und als solches zweimal im Pezzettino-Quadrat enthalten), und Pezzettinos Mutter ist möglicherweise ein grosses, violettes Trapez, in dem sowohl das Pezzettino-Quadrat als auch das kleine, grüne, rechtwinklige Dreieck enthalten sind. Und wie sieht Pezzettinos Grossvater aus? Und warum?

Mathematisches Argumentieren benötigt einen Gesprächsanlass. Es braucht neben dem individuellen Erforschen und Ausprobieren zwingend ein Unterrichtsgespräch, das einen Rahmen bietet, um die vier unterschiedlichen Geschichten zu erzählen. Passend zu diesen werden entsprechende Aktivitäten geplant. Zur «Das-ist-es-Geschichte» passt, dass Pezzettino in verschiedenen anderen Figuren gesucht und bezeichnet wird oder dass neue, eigene Figuren gestempelt und gebaut werden, die Pezzettino enthalten. Erzählt wird dann, wo Pezzettino in der neuen Figur steckt: «Hier ist Pezzettino.» Pezzettino als einfache Grundform lässt sich auch im Freien, im Kindergarten oder zu Hause suchen und finden. Es können Plakate erstellt werden, die dokumentieren, wo die Kinder überall Pezzettino bzw. ein kleines (oranges) Quadrat gefunden haben. Damit kann die «Es-geht-so-Geschichte» erzählt werden: «Ich habe hier auch ein kleines, oranges Quadrat gefunden.» Diese Aktivität führt dann sehr schnell zu Diskussionen: Kann ein gleich grosses grünes Quadrat auch als Pezzettino gelten? Oder ist das Merkmal Farbe ebenso wie Grösse und Form unverzichtbar, weil es Pezzettino konstituiert? Daran anschliessend wird die «Es-geht-so-weil-Geschichte» erzählt, die beschreibt, warum dies Pezzettino ist: «Dieses Quadrat ist auch orange und gleich gross wie Pezzettino.» Wird die Geschichte so erzählt, wird auch deutlich, dass das gleich grosse grüne Quadrat nicht akzeptiert werden kann: Es weist lediglich zwei der erforderlichen drei Merkmale auf. Auch das kann mit den Kindern herausgearbeitet werden: «Das kann nicht Pezzettino sein; das ist zwar auch ein Quadrat und es ist auch gleich gross wie Pezzettino, aber die Farbe ist nicht gleich.» Eine Diskussion darüber, welche der Merkmale zwingend sind, kann einsetzen. Möglicherweise merken aber die Kinder auch, dass das Merkmal Farbe nicht gleich entscheidend ist wie das Merkmal Form.

Figuren können auch zusammengesetzt werden: Pezzettino besteht auch aus lauter Einzelteilen, zum Beispiel aus zwei gleich grossen rechtwinkligen Dreiecken. Auch damit kann die «Es-geht-so-weil-Geschichte» erzählt werden, die schliesslich in die «Weil-es-so-geht-MUSS-Geschichte» mündet: «Alle Teile, mit denen man lückenlos ein kleines (oranges) Quadrat herstellen kann, gelten. Erkannt ist nun – wenn auch vielleicht ausschliesslich intuitiv – das mathematisch wichtige Konzept der Kongruenz.

Diese Aktivitäten haben alle erforschenden Charakter und werden mit argumentativen Handlungen ergänzt. Gerade dieses Argumentieren ist am Anfang für Kindergartenkinder sehr schwierig und braucht deshalb ein Modelling (Collins, Brown, & Newman, 1989; siehe auch Wannack, Schütz, & Arnaldi, 2009) der Lehrperson, die für die Kinder die vier unterschiedlichen Geschichten erzählt und damit die Argumente und die Argumentationskette in Worte fasst, bis schliesslich die Kinder übernehmen können und nur noch ein Scaffolding (Gerüst, Denkanstoss) von der Lehrperson benötigen.

Argumentieren lernen

Die Geschichte von Pezzettino bezieht sich mathematisch auf die Teil-Ganzes-Beziehung im Kompetenzbereich «Form und Raum» und fördert den Handlungsaspekt «Erforschen und Argumentieren» (D-EDK, 2014). Der Lehrplan 21 legt den entsprechenden Auftrag für den Zyklus 1 bis am Ende des zweiten Schuljahres fest und verlangt unter anderem, dass «die Schülerinnen und Schüler geometrische Beziehungen, insbesondere Längen, Flächen und Volumen, erforschen, Vermutungen formulieren und Erkenntnisse austauschen» können (D-EDK, 2014, S. 22, MA.2.B.1) und dass sie «Aussagen … zu geometrischen Beziehungen überprüfen, mit Beispielen belegen und begründen» können (D-EDK, 2014, S. 23, MA.2.B.2). Dies leisten die vier unterschiedlichen Geschichten (siehe oben) rund um Pezzettino und seine Freunde.

Wird die Grundform variiert – wie im Fall der kleinen Schwester oder der Mutter – und in weiteren Figuren gesucht und der Zusammenhang begründet, wird auch eine weitere Kompetenz aus dem Kompetenzbereich «Grössen, Funktionen, Daten und Zufall» aus dem Lehrplan 21 angesprochen: «Die Schülerinnen und Schüler können zu Grössenbeziehungen und funktionalen Zusammenhängen Fragen formulieren, diese erforschen sowie Ergebnisse überprüfen und begründen» (D-EDK, 2014, S. 32, MA.3.B.1). Der erste Schritt zum Aufbau dieser Kompetenz im Zyklus 1 wird beschrieben als: «Die Schülerinnen und Schüler können Längen, Flächen … miteinander vergleichen.»

5.2. Literatur

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Heidelberg: Springer.

Collins, A., Brown, J. & Newman, S. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Hrsg.), *Knowing, learning, and instruction: Essays in the honour of Robert Glaser (S. 453–495)*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

D-EDK. (2014). *Lehrplan 21. Mathematik*. Bern: Projekt Lehrplan 21.

Lionni, L. (2004). *Pezzettino*. Beltz & Gelberg: Weinheim.

Wannack, E., Schütz, A. & Arnaldi, U. (2009). Die Spiel- und Lernbegleitung im Kindergarten. *4 bis 8*, *99*(12), 23–25.

5.3. Beispiele aus der Praxis

Janine Rüdisüli, Janina Baumgartner, Jasmin Bürgy, Evi Fischer, Lucy Gappisch, Tanja Hartmann, Jasmin Karrer, Deborah Limi, Melissa Maurer, Bettina Mösli und Esther Brunner

Vier Geschichten zur Summenkonstanz

Einige Kindergartenlehrpersonen orientieren sich bei ihren Unterrichtseinheiten an den vier Schritten des mathematischen Argumentationsprozesses und erzählen dazu die vier Geschichten: «Das-ist-es-Geschichte», «Es-geht-so-Geschichte», «Es-geht-so-weil-Geschichte» und die «Weil-es-so-geht-MUSS-Geschichte» oder die «Immer-wenn-dann-Geschichte».

Beispielsweise startet eine Einheit mit einer Geschichte von einem Baum im Herbst, bei dem der Wind ein Blatt nach dem anderen an einen anderen Ort trägt. Immer wenn ein Blatt davon fliegt, darf ein Kind ein Blatt vom in der Kreismitte liegenden Papierbaum entfernen und an den neuen Ort (beispielsweise unter den Stuhl eines Kindes oder zu Füssen der Kindergartenlehrperson) legen. Die «Das-ist-es-Geschichte» ist erzählt.

In einem zweiten Schritt werden die relevanten Merkmale beschrieben.

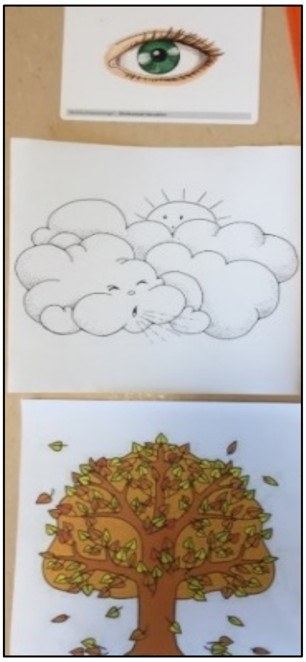
Dies machen die Kinder mit Hilfe des folgenden Verses:

«10 bunti Herbschtblätter hanged a üsem Baum.
De Wind het eis abe gno, jetzt hanged nu no 9 do.

9 bunti Herbschtblätter hanged a üsem Baum.
De Wind het eis abe gno, jetzt hanged nu no 8 do…»

Während des Aufsagens des Verses schauen sich immer zwei Kinder an. Das eine Kind zeigt am Anfang zehn Finger mit seinen beiden Händen und stellt damit den Baum dar. Das zweite Kind zeigt am Anfang null Finger und stellt damit den Boden dar. Schritt für Schritt werden beim einen Kind immer weniger Finger aufgestreckt und beim Partner bzw. der Partnerin dafür jeweils einer mehr. Die Kindergartenlehrperson stellt Fragen, was am Boden passiert, wenn ein Blatt vom Baum weggeweht wird, und anschliessend, ob es immer so ist, dass es beim Baum immer eins weniger und auf dem Boden dafür immer eins mehr wird. Die zentrale Struktur ist beschrieben und somit die «Es-geht-so-Geschichte» erzählt.

In einer nächsten Einheit liegen zehn Blätter im Kreis. Die Kinder schliessen die Augen, während die Kindergartenlehrperson den Wind spielt, einige Blätter vom Baum entfernt und sie hinter ihren



Stuhl auf den Boden legt. Die Kinder dürfen die Augen wieder öffnen. Nacheinander stellt die Kindergartenlehrperson folgende Fragen: Wie viele Blätter sind noch am Baum? Wie viele sind weggeflogen und wie weiss man das? Wie viele Blätter sind es am Baum und am Boden insgesamt und wie weiss man das? (Für jede der Fragen gibt es ein Symbol, welches den Kindern in der späteren Zweierarbeit Orientierung bieten sollen.) Dieser Ablauf wird einige Male mit denselben Fragen wiederholt, und anschliessend können die Kinder zu zweit dieselbe Situation nachstellen, indem ein Kind den Wind spielt und die Fragen stellt und das andere antwortet. Nach der Partnerarbeit wird im Kreis besprochen, was aufgefallen ist, ob etwas immer gleich war und warum dies der Fall war.
Somit ist die «Es-geht-so-weil-Geschichte» erzählt.

In der vierten Einheit geht es darum, Vorhersagen zu treffen. Dazu wird ein ähnliches Spiel gespielt wie in der letzten Einheit. Nur wird dieses Mal mit unterschiedlich vielen Blättern am Baum gestartet. Im Plenum oder/und in Zweiergruppen wird folgendes Spiel gespielt:

Kind A würfelt je nach Niveau mit einem, zwei oder drei Würfeln und legt die entsprechende Anzahl Blätter auf ein Tuch oder an einen gezeichneten Baum. Dann schliesst Kind A die Augen, während Kind B einige Blätter verschwinden lässt. Kind A muss dieselben Fragen wie beim letzten Spiel beantworten: Wie viele Blätter sind noch am Baum? Wie viele sind weggeflogen und wie weiss man das? Wie viele Blätter sind es am Baum und am Boden insgesamt und wie weiss man das? Wiederum helfen die Symbole den Kindern, sich an die Fragen und deren Reihenfolgen zu erinnern. Die Kinder können voraussagen, wie viele Blätter weggeweht wurden. Die «Weil-es-so-geht-MUSS-Geschichte» ist erzählt.

6. Unterrichtsvorschlag II: Meinungsverschiedenheiten

6.1. «Du hast angefangen!» «Nein, du!» Mathematische Sachverhalte durch logisches Argumentieren entscheiden lernen

Esther Brunner

Welches Kind kennt diese Situation nicht selbst: Der blaue und der rote Kerl im Bilderbuch «Du hast angefangen!» «Nein, du!» (McKee, 2007) streiten sich. Wer hat nun recht?

Abbildung 2: Bilderbuch (McKee, 2007)

Wenn zwei sich streiten, braucht es einen Gegenstand, der strittig ist oder strittig gemacht werden kann, etwas, worüber Unsicherheit herrscht, ob es so oder so ist. Dies ist ein wesentliches Merkmal aus der Argumentationstheorie (z.B. van Eemeren & Grootendorst, 2004). Ein zweites Merkmal ist, dass nun im Gespräch (oder Streit) Begründungen vorgebracht werden müssen und deren Gültigkeit ebenfalls in der Gesprächssituation geprüft wird, um zu entscheiden, welche Argumente überzeugender sind.

Mathematisches Argumentieren unterscheidet sich davon in einigen zentralen Punkten. So wird beispielweise nicht irgendwie argumentiert oder mit der Lautstärke, in der ein Argument vorgebracht wird, überzeugt, sondern einzig und allein mit logisch-schlüssigen Argumenten, die aus der Mathematik selbst stammen. Dies macht mathematisches Argumentieren so voraussetzungsreich und anspruchsvoll.

Beispiel einer Alltagsargumentation

Dazu ein Beispiel: Nehmen wir an, der blaue und der rote Kerl streiten sich darüber ob es heute kalt oder warm ist. Mhm, das ist letztlich eine Frage des Standpunktes und der Vergleichsgrösse. Wenn der blaue Kerl seine Meinung, dass heute kalt sei, damit begründet, dass es gestern 2 Grad wärmer war, ist sein Argument stichhaltig und plausibel. Wenn der rote Kerl hingegen meint, dass heute warm sei, und ins Feld führt, dass die Wetterprognosen für die kommenden Tage noch viel tiefere Temperaturen versprechen würden oder dass er gar nicht friere, aber immer friere, wenn es kalt sei, so sind das ebenso stichhaltige, plausible Argumente. Vermutlich wird die Gruppe, in der die unterschiedlichen Argumente vorgebracht und in Bezug auf ihre Gültigkeit geprüft werden, entscheiden, dass in diesem Fall – wie übrigens auch in der Geschichte, die das Bilderbuch erzählt – beide recht hätten.

Sowohl die Argumente des blauen wie des roten Kerls stammen aus dem Alltag und sind bezogen auf die im Argument vorgebrachte Begründung schlüssig und plausibel. Beide Argumente stützen sich dabei auf etwas Unbestrittenes ab, das sogenannte «Datum» (siehe Abbildung 2). Diese unbezweifelte Aussage – im Fall des blauen Kerls ist dies «gestern war 2 Grad kälter als heute», im Fall des roten Kerls hingegen «wenn es kalt ist, friere ich» – wird als Ausgangspunkt genommen, aus der die Behauptung, die sogenannte «Konklusion», abgeleitet wird. Die Behauptung selbst muss über eine «Regel» oder «Schlussregel» abgestützt werden. Dies ist die einfachste Struktur eines Arguments (vgl. Toulmin, 1996).

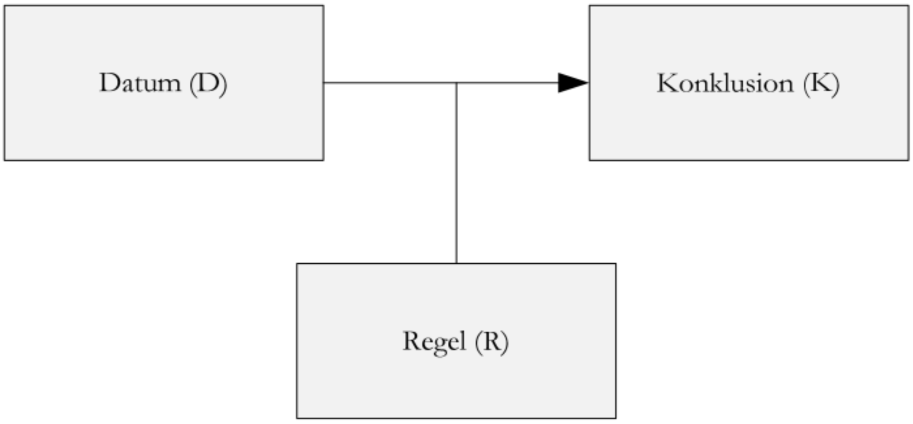


Abbildung 3: Argumentstruktur nach Toulmin (1996) (siehe Brunner, 2014)

Betrachten wir diese Argumentstruktur am Beispiel der beiden Kerle. Der blaue Kerl behauptet in der Konklusion: «Heute ist es kalt.» Er bezieht sich dabei auf das unbestrittene Datum, dass es gestern 2 Grad kälter gewesen sei als heute. Dies wird in seiner in der Begründung vorgebrachten Schlussregel deutlich. Er begründet nämlich: «Heute ist es kalt, weil gestern 2 Grad wärmer war, und im Vergleich dazu ist es heute kälter.» Der rote Kerl hingegen behauptet (Konklusion): «Heute ist es warm» und bezieht sich dabei auf seine subjektive Empfindung von Temperaturen: «Immer wenn es kalt ist, friere ich. Heute friere ich nicht.» Die herangezogene Regel in seiner Begründung lautet: «Heute ist es warm, denn ich friere nicht, und immer wenn es kalt ist, friere ich.» Beide Argumente sind vollständig und plausibel und deshalb haben auch beide recht.

Würde nun der rote Kerl seine Behauptung «Heute ist es warm» anders begründen, könnte das anders aussehen. Wenn er beispielsweise auch auf die unbestrittene Tatsache, dass gestern 2 Grad kälter war, zurückgreifen würde, die der blaue Kerl verwendet hat, wäre sein Argument nicht gültig, wenn er sagen würde: «Heute ist es warm (Konklusion). Gestern war es 2 Grad kälter (Datum). Darum ist es heute wärmer (Schlussregel) und er hätte nicht recht, weil die Schlussregel falsch ist.

Mathematisches Argumentieren

Beim mathematischen Argumentieren braucht es minimal die gleiche Struktur eines Arguments: eine unbestrittene Aussage (Datum), ein daraus abgeleiteter Schluss bzw. eine Behauptung (Konklusion) und eine Begründung des Schlusses (Regel). Anders als beim alltäglichen Argumentieren aber müssen die verwendeten Regeln aus der Mathematik selbst stammen und nicht aus dem Alltag. Auch hierzu wieder ein Beispiel: Nehmen wir an, die beiden Kerle streiten sich darum, ob eine bestimmte Figur (zeichnen) ein Viereck ist oder nicht. Der blaue Kerl behauptet: «Das ist ein Viereck», der rote hingegen widerspricht: «Nein, das ist kein Viereck.» Dieser mathematische «Streit» kann nun einfach entschieden werden anhand der vorgebrachten Argumente. Der blaue Kerl sagt beispielsweise: «Dies ist ein Viereck (Behauptung). Vierecke haben immer vier Ecken (unbestrittene Tatsache: Datum). Dieses Viereck hat vier Ecken, also ist es ein Viereck.» Recht hat er!

Anders der rote Kerl: Er sagt: «Dies ist kein Viereck. Ein Viereck sieht genauso aus», und zeigt dabei auf ein Quadrat. «Weil dies nicht so aussieht, ist das kein Viereck.» Der rote Kerl hat eine Aussage als Datum verwendet, die nicht wahr ist: «Ein Viereck sieht genauso aus wie ein Quadrat.» Ein Quadrat ist zwar auch ein Viereck, aber ein spezielles, kein allgemeines. Sein Schluss ist falsch und sein Argument ungültig, der blaue Kerl gewinnt.

Argumente zu konstruieren, die aus der Mathematik selbst stammen, ist beim mathematischen Argumentieren zentral und gleichzeitig sehr anspruchsvoll.

Fördern von mathematischem Argumentieren

Gefördert werden kann das aber sehr gut durch eine solche «Streitsituation», wie sie alle Kinder aus ihrem Alltag kennen. Konstruiert wird aber ein Streit über eine mathematische Situation oder ein Problem, nicht eines aus dem Alltag. Und die Kinder müssen versuchen, anstelle des roten und des blauen Kerls zu argumentieren, und damit zwischen den beiden widersprüchlichen Behauptungen entscheiden, welche gültig ist.

Diese Anlage bietet eine Vielzahl reichhaltiger Lerngelegenheiten zum mathematischen Argumentieren. Immer wenn der blaue Kerl etwas sagt, behauptet der rote das Gegenteil. Entschieden, wer Recht hat, wird durch ein gültiges Argument.

Diese didaktische Figur lässt sich beliebig in verschiedensten mathematischen Inhaltsgebieten einsetzen, beim Zählen, beim Benennen von Formen, aber auch beim Herstellen von mathematischen Beziehungen («2 ist die Hälfte von 4») oder Begründen von Mustern («immer nach 3 roten kommt 1 blaues, also kommt jetzt ein blaues»). Wichtig ist, dass die didaktische Figur immer eingebettet wird in eine Gesprächssituation, in der die unterschiedlichen Argumente hervorgebracht und beurteilt werden können, inwiefern sie gültig sind. Gerade diese Entscheidung, ob ein Argument gültig ist oder nicht, braucht viel fachliches Wissen, sowohl von den Kindern wie der Lehrperson. Ist dieses mathematische Wissen bei den Kindern noch nicht vorhanden, übernimmt die Lehrperson im Sinne eines Modellings (Collins, Brown, & Newman, 1989) und stellt ein solches gültiges und vollständiges Argument vor, lässt es die Kinder beurteilen und kontrastiert mit einem Argument, das ungültig ist, das ebenfalls von den Kindern eingeschätzt werden kann.

Mathematisches Argumentieren – ein vielschichtiger Prozess

Mathematisches Argumentieren ist ein vielschichtiger Prozess, der eine aktiv produzierende und eine passiv nachvollziehende Seite hat. Die aktive Seite besteht in der Konstruktion eines Arguments, die passive hingegen im Nachvollziehen eines vorgebrachten Arguments. Ein weiterer, wichtiger Prozess, der sich im Gespräch ereignet, ist die Beurteilung des Arguments, die Verifikation, wenn es gültig ist, und die Falsifikation, wenn es ungültig ist. Verifikation und Falsifikation sind zentrale mathematische Prüfprozesse, die für die ganze Mathematik bedeutsam sind und Teil des mathematischen Arbeitens schlechthin sind. Mathematisch argumentieren mit Kindergartenkindern bedeutet deshalb auch, sich an substanziellem Mathematiktreiben zu orientieren, wie es für alle Schul- und Bildungsstufen der Fall ist.

Und: Mathematisches Argumentieren ist nicht nur eine anspruchsvolle, sondern auch eine lustvolle Tätigkeit, insbesondere wenn man damit – wie in unserem Beispiel – entscheiden kann, wer von den beiden Streithähnen recht hat!

6.2. Literatur

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Heidelberg: Springer.

Collins, A., Brown, J., & Newman, S. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Hrsg.), *Knowing, learning, and instruction: Essays in the honour of Robert Glaser (S. 453–495)*. Hillsdale, N. J.: Erlbaum.

Eemeren van, F. H., & Grootendorst, R. (2004). *A Systematic Theory of Argumentation. The pragma-dialectical approach*. Cambridge: University Press.

McKee, D. (2007). *Du hast angefangen! Nein, du!* (19. Aufl.). Frankfurt a. M: Fischer Sauerländer.

Toulmin, S. E. (1996). *Der Gebrauch von Argumenten (2. Aufl.).* Weinheim: Beltz.

6.3. Beispiele aus der Praxis

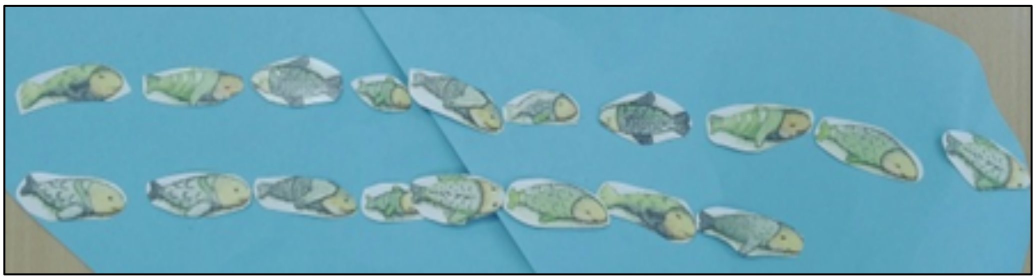
Janine Rüdisüli, Janina Baumgartner, Jasmin Bürgy, Evi Fischer, Lucy Gappisch, Tanja Hartmann, Jasmin Karrer, Deborah Limi, Melissa Maurer, Bettina Mösli und Esther Brunner

«Wer von uns beiden hat recht?»

In einem Kindergarten wird mit Formen gearbeitet. Eine Puppe kommt aufgeregt zurück aus dem «Formenland». Sie erzählt den Kindergartenkindern, dass sie wieder ganz viele Formen mitbringen konnte. Die Formen werden aus einem grossen Koffer herausgeholt, als die Puppe erschrocken feststellt, dass bei der Rückreise aus dem Formenland alles durcheinandergebracht wurde. Sie bittet die Kinder, ihr beim Sortieren zu helfen.

Die Kinder arbeiten in Zweierteams an einem Gruppentisch und versuchen, die vielen Formen aus dem Formenland irgendwie zu sortieren. Viele Teams kommen schnell darauf, dass Sie alle Dreiecke, Rechtecke, alle Quadrate und alle Trapeze zusammenlegen können. Die Kinder bilden verschiedene Haufen. Beim Sortieren insistiert ein Kind und sagt, dass eine bestimmte Figur nicht dorthin gehöre, wo es sein Partner gerade hingelegt hat. Die Kindergartenlehrperson unterstützt das Argumentieren, indem sie nachfragt, warum die Form nicht auf den Haufen gehört, wohin sie dann gehöre und weshalb. Mit der Unterstützung der Kindergartenlehrperson können die Kinder versuchen, sich gegenseitig mit Argumenten von ihrem Lösungsweg zu überzeugen und danach gemeinsam zu entscheiden, wohin die Form gelegt werden soll.

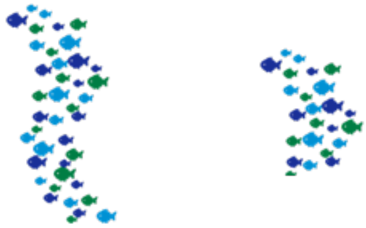
Und warum ist zehn mehr als acht?



In einem anderen Kindergartenzimmer sitzen zwei Plüschpinguine in der Mitte des Stuhlkreises. Der kleine Pinguin Pipp und seine Mutter gehen jeden Tag fischen, so wird dies im Bilderbuch «Wie viel ist eine Million?» erzählt. Eines Tages sitzt Pipp vor einem Haufen Fische. Er behauptet, dass sie am Tag zuvor mehr gefangen hätten. Die Mutter verneint und meint, sie hätten gestern acht Fische gefangen. Es werden acht Fische entsprechend dem Fang vom vorherigen Tag und zehn Fische entsprechend dem Fang vom heutigen Tag vor den Plüschpinguinen ausgelegt. Auf die Frage, welcher Pinguin denn nun recht hat, zählen die Kinder die Fische des aktuellen Fangs. «Die Mutter hat recht, weil zehn mehr sind als acht», behauptet ein Kind. Auf die Frage, warum die Kinder wissen, dass zehn mehr als acht sei, gibt es verschiedene Antworten. Ein Kind bezieht sich darauf, dass beim Zählen die Zahl acht vor der Zahl zehn kommt und deshalb zehn mehr sein muss. Ein anderes beginnt, die zum Darstellen des Bilderbuchs verwendeten Fische von einem Haufen in eine Reihe zu legen. Das Kind begründet, dass zehn mehr ist als acht, weil die Reihe mit zehn Fischen länger ist als diejenige mit acht Fischen. An einigen Tagen nacheinander gehen die Pinguine zusammen fischen. Wenn sie fertig sind, vergleichen sie immer, wer mehr Fische gefangen hat. Der kleine Pipp ist immer überzeugt, dass er mehr Fische hat. Doch hat er wirklich recht und warum oder warum eben nicht?

An einem Tag laufen die beiden Pinguine um ein Loch in der Eisplatte herum. Plötzlich entdecken sie im Wasser ganze Fischschwärme. Die Mutter entdeckt einen Fischschwarm und Pipp entdeckt ebenfalls einen.

LP:	Wer hat den grösseren Fischschwarm entdeckt?
Kinder:	Die Mutter!
LP:	Warum wisst ihr das?
Mädchen:	Ich habe schnell gezählt.
Junge:	Ich nicht.
LP:	Warum weisst du es, ohne zu zählen?
Junge:	Der eine Fischschwarm ist länger.
Mädchen:	Und er ist auch breiter. Er ist länger und breiter.



LP: Und weil der Fischschwarm der Mutter länger und breiter ist, sind es mehr Fische?
Junge: Ja.

Die Kindergartenlehrperson hilft den Kindern bei der Formulierung des Begründungszusammenhangs.

Argumentieren mit dem Samichlaus

Auch aktuelle Themen oder Feste können als Rahmen für eine Einheit zum mathematischen Argumentieren genommen werden. In einem Kindergarten war der Samichlaus zu Besuch und brachte Leckereien mit. Die Kindergartenlehrperson spielt mit Figuren, dass der Samichlaus nach einem Tag bei den Kindern jeweils mit den restlichen Nüsschen zurück in den Wald geht und die Reste unter den Tieren aufteilt. An jedem Abend sind unterschiedlich viele Tiere da.
Hat es für jedes Tier eine Nuss? Die Kinder zählen ohne Aufforderung. Alle Tiere zusammen sind zwölf. Auf die Frage, wie viele Nüsse es noch im Sack des Samichlauses haben muss, damit alle eine Nuss bekommen, folgt schnell die Antwort «zwölf». Die Kindergartenlehrperson fragt nach: «Warum?» – «Wenn jedes Tier eine Nuss bekommt, dann muss es ja von beidem (Tiere und Nüsse) gleich viel haben. Also zwölf Nüsse und zwölf Tiere. Dann bekommt jedes Tier eine Nuss», begründet ein Kind. Aus dem Sack des Samichlauses werden die Nüsse ausgeleert. Es sind zwölf Nüsse, und beim Verteilen merken die Kinder, dass sie recht hatten mit ihrer Vorhersage.

Auch in diesem Setting kann eine Meinungsverschiedenheit inszeniert werden. Am nächsten Abend, als der Samichlaus aus der Stadt zurück in den Wald kommt, sind sechs Tiere anwesend. Im Sack des Samichlauses sind wieder zwölf Nüsse übriggeblieben, die er auf die Tiere verteilen kann. Das Reh jubelt und behauptet, dass sie heute doppelt so viele Nüsse erhalten werden wie gestern. Der Hase hingegen meint, dass jedes Tier sogar drei Nüsse bekommt. Indem die Kindergartenlehrperson nachfragt, wer recht hat und wieso, werden die Kinder zum anspruchsvollen mathematischen Argumentieren angeregt.

Bei diesem Setting kann zuerst begründet werden, wer weshalb recht hat. Danach kann handelnd durch das Verteilen der Nüsse überprüft werden, ob das Urteil der Kinder, welches Tier recht hat, richtig war. Die Herausforderung an diesem und an ähnlichen Settings ist, dass die Kinder zuerst angehalten werden, mit ihren eigenen Worten zu begründen, bevor sie einfach ausprobieren, wer recht hat.

Nachdem in einem zweiten Schritt ausprobiert wurde, liegen beispielsweise vor jedem der sechs Tiere zwei Nüsse. Die Kindergartenlehrperson stellt die falsche Behauptung auf, dass es jetzt insgesamt viel mehr Nüsse sind als beim letzten Mal, weil jedes Tier ja zwei hat. Die Kinder widersprechen sofort, und die Kindergartenlehrperson fragt nach, warum es nicht stimmt.
Nach dieser Sequenz wird das kurze Rollenspiel im Freispiel von den Kindern immer wieder gespielt und die Nüsse des Samichlauses werden verteilt.

7. Unterrichtsvorschlag III: Fehler und Fehlersuche

7.1. «Wo ist der Fehler?» Vom Nutzen mathematischer Beziehungen

Esther Brunner

Fehlersuche: Unterschiedliche Anforderungen

Welches Kind liebt sie nicht, diese lustvollen «Fehlersuchen»!? Viele Bilderbücher oder auch Rätsel in Zeitschriften zielen genau darauf ab und fordern beispielsweise dazu auf, durch den Vergleich zweier beinahe identischer Bilder Abweichungen und «Fehler» zu suchen oder in absurden Situationen durch die Anwendung von Alltagswissen das Unmögliche zu bestimmen.

Abbildung 4: Suchbilderbuch (Butschkow, 2011)
© 2011 Baumhaus Verlag in der Bastei Lübbe AG

In Such-Bilderbüchern wie demjenigen von Butschkow (2011) wird alltägliches Wissen «verletzt», indem beispielsweise das Brötchen mit einer Säge zerschnitten wird oder die Schuhe statt im Schuhschrank im Kühlschrank stehen und anderes mehr. Diese «Fehler» führen zu teils absurden, lustigen Situationen. Kinder bestimmen hier die «Fehler» durch ihr Alltagswissen und ihre alltagsbasierten Erfahrungen. Falsch ist etwas, was dem Alltagswissen widerspricht.

Andere Bücher oder Abbildungen (z. B. Greune, 2013) verlangen, den Fehler zu finden, indem zwei beinahe identische Bilder miteinander verglichen werden und Abweichungen im einen Bild vom Original als Fehler identifiziert werden. Hier ist ein visueller Vergleich nötig, aber nicht zwingend Welt- oder Alltagswissen. Ein weiterer Typus solcher «Fehlersuchen» referiert auf Ober- und Unterbegriff und damit auf die Fähigkeit zur Klassifikation (Piaget & Szeminska, 1975): Kinder werden gefragt, was nicht in die Reihe passt, wenn beispielsweise Socke, Gurke, Peperoni und Rüebli gezeigt werden. Natürlich wird auch hierfür Weltwissen benötigt, aber darüber hinaus auch die Fähigkeit zu klassifizieren: Die Socke gehört nicht dazu, weil alles andere Gemüsesorten sind.

Mathematische Fehler als Ausgangslage zum Argumentieren

Bei mathematischen Fehlern verhält es sich etwas anders. Es geht nicht um Weltwissen, dem widersprochen wird, oder um ausschliesslich visuelle Unterschiede, sondern um eine Verletzung einer mathematischen Struktur, eines Zusammenhangs oder einer Gesetzmässigkeit. Jemand zählt: «1, 2, 4, 5, …» und alle wissen, dass hier eine mathematische Konvention verletzt wird, indem nach der 2 die 3 kommen müsste als eine stabile Reihenfolge (Fuson, 1988). Oder jemand sagt, dass 5 das Doppelte von 2 sei, was nachweisbar nicht zutrifft, sofern man in der Lage ist, eine Verdoppelung vorzunehmen, entweder durch eine Zuordnung oder eine Multiplikation. Verletzt wird mit dieser Aussage eine mathematische Gesetzmässigkeit. Solche mathematischen Fehler können als Ausgangslage zum Argumentieren dienen. Dazu braucht es vier Teilschritte:

1) Der Fehler bzw. das Abweichen von der mathematischen Regel, Gesetzmässigkeit oder Konvention muss gesucht und gefunden werden. Dazu muss die Struktur zunächst identifiziert werden können.
2) In einem weiteren Schritt muss begründet werden, warum es sich bei der gefundenen Abweichung um eine Abweichung von einer Regel handelt.
3) Nun muss die fehlerhafte Struktur korrigiert werden, indem die erkannte Ordnung wieder hergestellt wird.
4) Abschliessend kann begründet werden, warum die Struktur nun wieder korrekt ist.

Fehlerhafte Muster: Was ist das?

Dieses Prinzip, anhand von fehlerhaften mathematischen Strukturen mathematisches Argumentieren zu fördern, kann gut am Beispiel von «Mustern» für den Kindergarten und die Schuleingangsstufe (Zyklus 1) konkretisiert werden. Der Begriff «Muster» wird zwar unterschiedlich verwendet und beispielsweise auch für eine Vorlage (Schnittmuster) verwendet (Lüken, 2012), zielt aber in einem mathematischen Sinne auf eine bestimmte Struktur ab. Charakteristisch ist dabei, dass es sich bei Mustern um «Wiederholungen von Kombinationen, Reihenfolgen oder einzelnen Elementen» (Benz, Peter-Koop, & Grüssing, 2015, S. 294) handelt. Deshalb kann ein Muster «sowohl die Wiederholung einer Grundeinheit bezeichnen als auch die Grundeinheit selbst (z.B. die Vorlage)» (ebd.). Der Begriff «mathematische Struktur» ist da präziser. Eine solche beschreibt «die Beziehung zwischen den einzelnen Elementen einer Menge untereinander, zwischen Teilmengen dieser untereinander sowie zwischen Einzelelementen, Teilmengen und der gesamten Menge» (ebd.). Im Wesentlichen kann man «Muster» als zahlenmässige oder räumliche Regelmässigkeiten verstehen, während die Beziehung zwischen den verschiedenen Komponenten eines Musters als Struktur interpretiert wird.

Unterschieden werden Musterfolgen und räumliche Muster (Benz et al., 2015, S. 294 f.). Bei den Musterfolgen geht es um ein Aneinanderreihen und Vervielfachen von Objekten, zum Beispiel von Muggelsteinen oder Wendeplättchen:

Abbildung 5: Zwei Musterfolgen mit Muggelsteinen (Foto: E. Brunner)

In diese Kategorie gehören auch Bandornamente.

Abbildung 6: Bandornament gefilzt (Klasse T. Solano Lauener)

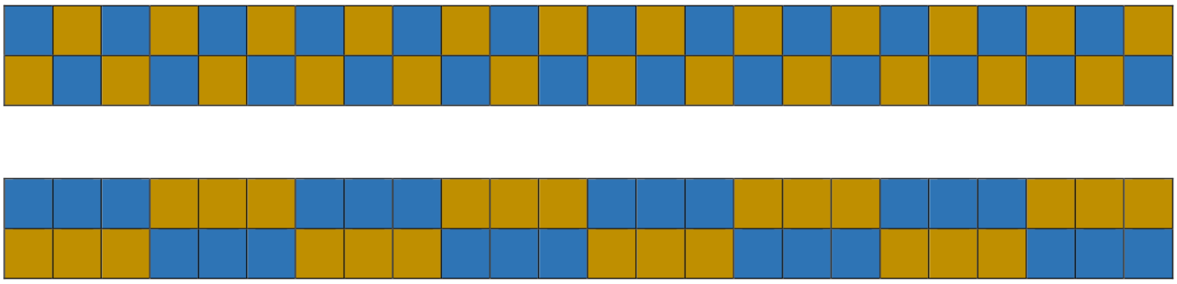


Abbildung 7: Bandornamente mit unterschiedlichen Symmetrien (Bild: M. Albin)

Räumliche Muster bzw. Strukturen hingegen – wie beispielsweise Parkette – sind nicht nur linear als Wiederholung konzipiert, sondern umfassen den ganzen Raum, brauchen also das Erkennen von Beziehungen innerhalb einer Fläche oder des Raumes.

Abbildung 8: Wandparkett Alhambra, Granada (Fot:o E. Brunner)

Abbildung 9: Wandparkett Alhambra, Granada (Foto: E. Brunner)

Ein fehlerhaftes Muster entsteht dann, wenn die Regeln zu seiner Bildung verletzt werden, wenn also die vorgenommene Wiederholung nicht korrekt ist.

Ein Unterrichtsbeispiel: Fehler in Mustern

Für den Kindergarten lassen sich im Zusammenhang mit Mustern mindestens fünf grundlegende Aktivitäten beschreiben (Steinweg, 2003):

1) Erkennen von Mustern,
2) Nachzeichnen von Mustern,
3) Vergleichen von Mustern,
4) Fortsetzen eines Musters und schliesslich
5) Beschreiben des Musters.

Jede dieser Aktivitäten braucht unterschiedliche Kompetenzen. Das Erkennen eines Musters als erster Schritt erfolgt meist intuitiv und ist deshalb noch nicht reproduzier- und kommunizierbar. Beim Nachzeichnen und beim Vergleichen ist eine genaue Wahrnehmung und Übertragung nötig. Aber erst beim Fortsetzen des Musters ist eine genaue sequenzielle Analyse notwendig und die Antwort auf die Frage, wodurch das Muster charakterisiert ist und ab wann die Wiederholung stattfindet bzw. welches die Grundeinheit darstellt. Zum Beschreiben von Mustern sind sprachliche und fachsprachliche Mittel notwendig.
Diese Aktivitäten können auch im Zusammenhang mit fehlerhaften Mustern aufgegriffen und um weitere zentrale Handlungen ergänzt werden:

1) Zunächst geht es um das Erkennen des Fehlers,
2) dann um das Bestimmen des Fehlers,
3) den Vergleich zwischen Fehler und Grundeinheit oder Struktur, also den Vergleich des Feh lers mit dem Korrekten.
4) Nun kann der Fehler korrigiert und das Muster korrekt fortgesetzt werden.
5) Und schliesslich kann das Muster beschrieben und der Fehler begründet – «Es hat immer zuerst zwei blaue und dann zwei rote Plättchen, dann braucht es hier wieder zwei rote» – und eine Verallgemeinerung entwickelt werden: «Man muss immer den Bauplan nehmen und den so weitermachen.»

Erzählt werden dann die vier Geschichten zum Argumentieren (Brunner, 2016a) in einer etwas veränderten Form:

1. «Das-ist-der Fehler-Geschichte»
2. «Der Fehler-geht-so-Geschichte»
3. «Das ist ein Fehler, weil-Geschichte»
4. «Weil-das-Muster-so-geht-MUSS-Geschichte» oder «Immer-wenn-dann-Geschichte»

Diese vier Geschichten bleiben sich gleich, unabhängig davon, ob es sich um einen Fehler in einem Bandornament oder einem Parkett oder einer sonstigen mathematischen Struktur handelt. Reichhaltiges mathematisches Argumentieren auf der Basis von Fehlersuchen regt zu vertiefter Einsicht in diese Struktur an. Und weil Muster und Strukturen in unserem Alltag allgegenwärtig sind, lassen sich beliebig viele unterschiedliche Handlungssituationen und Lernumgebungen zum mathematischen Argumentieren gestalten.

7.2. Literatur

Benz, C., Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Berlin: Springer Spektrum.

Brunner, E. (2016). Bin ich ein Teil von dir? Kindergartenkinder lernen mathematisch argumentieren. *4 bis 8*, *2016*(8), 37–39.

Butschkow, R. (2011). *Da stimmt doch was nicht! Ein Suchspass-Wimmelbuch*. Köln: Bastei Lübbe.

Fuson, K. (1988). *Children's counting and number concept*. New York: Springer.

Greune, M. (2013). *Finde den Fehler im Kindergarten*. Würzburg: Arena.

Lüken, M. M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht: Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Münster: Waxmann.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1975). *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde.* Stuttgart: Klett.

Steinweg, A. S. (2003). Vom Reiz der Wiederholung. *4 bis 8*, (3), 18–19.

7.3. Beispiele aus der Praxis

Svenja Grössl, Janina Baumgartner, Jasmin Bürgy, Evi Fischer, Lucy Gappisch, Tanja Hartmann, Jasmin Karrer, Deborah Limi, Melissa Maurer, Bettina Mösli und Esther Brunner

Perlenketten

Fehler und Fehlersuchen bieten sich beim Herstellen von Mustern an: Ist das Muster korrekt oder weist es einen Fehler auf? Welcher Teil wiederholt sich im Muster? Solche und andere Fragen beschäftigen auch die Kindergartenkinder, für die die Kindergartenlehrperson eine Bijouterie eingerichtet hat. Als Einstieg ins Thema dient das Bilderbuch «Die schwarze Henne», in dem die Oberhenne immer eine Kette trägt. Diese hat sie aus einer Bijouterie. In der im Kindergarten eingerichteten Bijouterie haben die Kinder nicht nur die Möglichkeit, Ketten einzukaufen oder zu verkaufen, sondern diese auch selbst herzustellen. Die Kinder haben Vorlagen, die sie selbst abzeichnen können, ausserdem haben sie die Möglichkeit, selbst neue Muster zu erfinden. Sie können diese aufzeichnen und anschliessend die Muster zu einer Kette auffädeln. Die Lehrperson hilft den Kindern hernach bei deren Verschliessen dieser und hat so eine gute Möglichkeit, mit den Kindern ins Gespräch zu kommen, die Muster mit ihnen nochmals anzusehen und auf etwaige Fehler hinzuweisen und diese berichtigen zu lassen. Auch für das mathematische Argumentieren sind Möglichkeiten gegeben, indem die Lehrperson bei den Kindern nachfragt, warum denn eine bestimmte Farbe falsch am Platz sei, und welche es warum richtigerweise bräuchte: «Ist das Muster korrekt? Warum weisst du, dass es so weitergehen muss?»

Der Bauplan eines Musters

Alle Kinder bekommen von der Lehrperson Hefte verteilt, in denen Muster abgebildet sind. Nachdem besprochen wurde, was ein Muster ist, nämlich etwas, das immer wieder von vorne beginnt, erklärt die Lehrperson, dass dieser Bauplan eines Musters «Rapport» genannt wird. In den Heftchen zeichnen die Kinder dann die vorgegebenen Muster mit Farbstiften nach und setzen es fort. Als nächstes gilt es, innerhalb von Mustern einen Bauplan bzw. Rapport zu erkennen, um diese anschliessend fortsetzen zu können. An der Wandtafel führt die Lehrperson die Aufgabe mit den

Kindern mehrmals durch, bis sie es verstanden haben. Nach jedem Rapport wird ein Trennstrich gezeichnet, um den Bauplan des Musters besser erkennen zu können. Anschliessend bekommen die Kinder erneut Hefte verteilt, in denen verschiedene Muster vorgefertigt sind. Die Kinder erhalten nun die Aufgabe, in einer Einzelarbeit die Rapporte in den Mustern zu finden und diese dann mit einem Trennstrich zum nächsten Rapport zu kennzeichnen bzw. abzutrennen.
Nun geht es zurück in die geführte Sequenz. Die Lehrperson zeigt an der Wandtafel wieder Muster vor, in denen aber etwas nicht stimmt. Sie erklärt, dass sich Fehler eingeschlichen haben, die es nun zu berichtigen gilt. Zuerst fragt sie nach dem Bauplan, das heisst nach dem Rapport des Musters. Dieser wird jeweils eingezeichnet. Anschliessend wird der Fehler gesucht und begründet:

Mögliche Frage	**Mögliche Antwort**
Wo erkennt ihr die Fehler im Muster?	Hier!
Was ist hier genau der Fehler?	grün, orange, grün, orange, anstatt grün, grün, orange, orange
Warum ist das der Fehler?	Weil der Bauplan blau, grün, grün, orange, orange ist. Der Bauplan bestimmt, wie das ganze Muster aussieht. Er wiederholt sich immer wieder.
Wann ist es immer so?	Nur wenn der Bauplan sich immer wieder, genauso wie er ist, wiederholt, ist das Muster richtig.

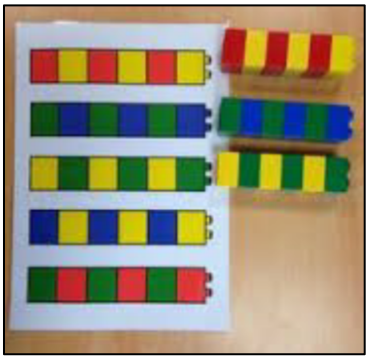
Nun sind die Kinder wieder selbst an der Reihe. Die Lehrperson verteilt vorbereitete Arbeitsblätter, auf denen die Kinder in einer Einzelarbeit die Rapporte einzeichnen sollen. Die Lehrperson begleitet diese Aufgabe sprachlich und überprüft, indem sie den Kindern die oben genannten Fragen stellt und sie so zum Argumentieren anhält. Sofern alles richtig ist, bekommen die Kinder Blankoblätter und geben das Muster richtig wieder. Dabei berücksichtigt die Lehrperson den individuellen Lernstand der einzelnen Kinder und nimmt Rücksicht darauf,, dass die Aufgabe für manche Kinder, gerade nach der umfangreichen und langen Vorarbeit, recht anspruchsvoll ist.
Im anschliessenden Freispiel nutzt die Lehrperson die Möglichkeit, im Einzelgespräch nochmals die Arbeit der einzelnen Kinder anzusehen und diese mit ihnen zu besprechen. Dabei kann die Lehrperson nochmals auf das Argumentieren hinweisen, indem sie die geforderten Sätze vorspricht und diese wiederholen lässt.

Auf Spurensuche

Anders in einer anderen Kindergartenklasse. Hier dürfen die Kinder in einer Postenarbeit verschiedene Aufgaben lösen, bei denen es um das Nachlegen und Fortsetzen von Mustern geht:

1. Die Kinder bekommen eine Vorlage und bauen ihr gemäss einen Turm aus Duplosteinen.
2. Die Kinder erhalten wieder eine Vorlage. Nun formen sie aus bereitgelegter Knete Kügelchen in der passenden Farbe und legen das Muster mit diesen nach.

3. Auf einem Arbeitsblatt sind Muster vorgegeben, die, farblich passend, weitergeführt werden.
4. Die Kinder erhalten wieder eine Vorlage und legen das Muster mit Würfelmosaiksteinen nach.




Die Lehrperson begleitet die Kinder an den verschiedenen Posten und fragt nach, warum sie wissen, was nun für eine Farbe kommt, und regt sie dadurch zum mathematischen Argumentieren an.

In der nächsten, der zweiten, Lektion geht es dann daran, die jeweiligen vorgegebenen Muster aus den Materialien der vorherigen Lektion (Duplosteine, Knetkugeln, Arbeitsblatt, Würfelmosaiksteine) abzuzeichnen bzw. einen Bauplan zu erstellen. Dies geschieht wieder in einer Postenarbeit.

Abbildung 10: Nachlegen und Fortsetzen von Mustern

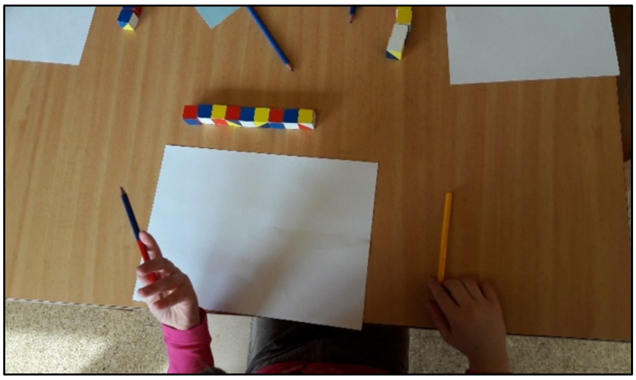


Abbildung 11: Herausfinden des «Bauplans»

In der darauffolgenden, der dritten, Lektion bekommen die Kinder Konkurrenz von einer anderen fiktiven Bankräuberbande. Den Kindern werden die Muster dieser fiktiven Bande vorgelegt, wobei sie feststellen, dass Fehler in deren Mustern enthalten sind. Diese Fehler sollen benannt werden und anschliessend soll begründet werden, warum es sich dabei um Fehler handelt. Die Kinder werden von der Lehrperson zum mathematischen Argumentieren angeleitet, indem sie ihnen die Satzstruktur vorgibt: «Ich denke, das Muster ist hier falsch (zeigen), weil es hier einen blauen Legostein hat, obwohl vorher ein grüner, dann ein roter und dann ein blauer war. Und hier kommt gleich der blaue Legostein nach dem grünen.»

Nun sind die Kinder an der Reihe und arbeiten an den verschiedenen Posten. Die Lehrperson begleitet die Fehlersuche und die mathematischen Begründungen intensiv, indem sie immer wieder nachfragt:

«Bist du dir ganz sicher?»

«Woher weisst du das?»

«Überprüf das nochmals!»

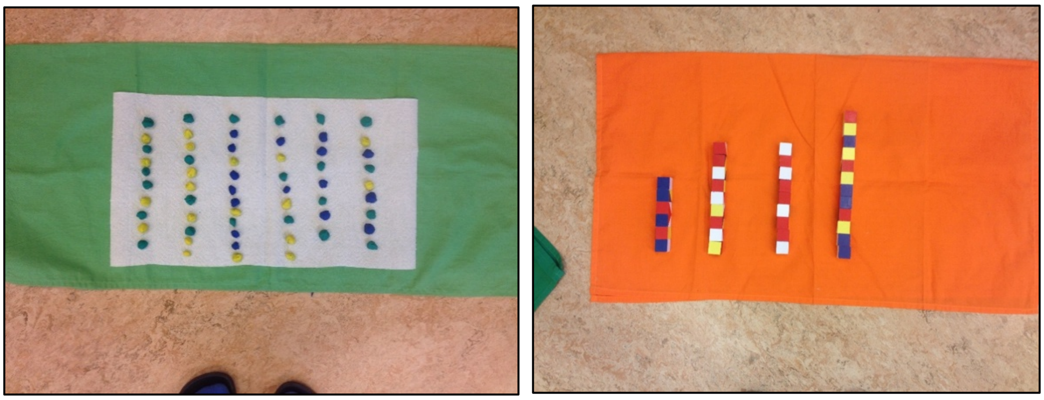


Abbildung 12: Fehlersuche

Fehler können auch absichtlich in Muster eingebaut werden, dann nämlich, wenn zum Beispiel jeweils die Musterhexe oder der Musterteufel unterwegs war und in einem vorhandenen, korrekten Muster einen Fehler eingebaut hat, den man finden und korrigieren muss.

8. Unterrichtsvorschlag IV: Lügengeschichten

8.1. «Alles wirklich wahr» – mathematisch argumentieren lernen im Kindergarten

Esther Brunner

Lügengeschichten: das Spiel mit der Wahrheit

Flunkern, schwindeln, übertreiben und Geschichten erfinden: Das sind Tätigkeiten, die allen Kindern bekannt sind, auch wenn sie wissen, dass man eigentlich nicht schwindeln sollte. Das weiss auch der kleine Rabe Socke im Bilderbuch «Alles echt wahr! oder Rabenstarke Schwindeleien für alle Gelegenheiten» (Moost & Rudolph, 2001). Dennoch gibt es für ihn Situationen, in denen er ein wenig schwindelt und das mit «Alles echt wahr» zu verstecken sucht. Der kleine Rabe Socke und seine Freunde schwindeln zum Beispiel, weil sie heimlich alle ihre Freunde mit in die Ferien genommen haben und diese jetzt auch versteckt und versorgt werden müssen, ohne dass jemand etwas herausfindet. Der kleine Rabe Socke glaubt zwar zu wissen, wie man am besten schwindelt, aber irgendwie läuft dann halt doch nicht alles nach Plan und die Wahrheit kommt ans Licht. Im Bilderbuch dreht sich alles ums Lügen und um die Wahrheit sagen. Dabei wird die Sache mit dem Lügen und mit der Wahrheit nicht ganz so eng gesehen wie in der Mathematik, denn «Notlügen» werden nicht nur beim Raben Socke und seinen Freunden mit einem Schmunzeln verziehen, sondern auch im Alltag.

Wahre und falsche Aussagen unterscheiden lernen

Was aber ist eine Lüge und was ist genau «wahr»? Ist das Gegenteil von «wahr» dann «falsch» oder «halb wahr» oder eben geschwindelt? Die Mathematik löst diese Frage ganz einfach, indem sie zwischen «wahrer Aussage» und «falscher Aussage» unterscheidet[1]. «Wahr» ist eine Aussage in der Mathematik nur dann, wenn sie vollständig zutrifft. Eine «falsche Aussage» ist jede Aussage, die nicht zutrifft. Es gibt in der Mathematik deshalb keine halben Wahrheiten oder so etwas wie zulässige bzw. akzeptierte Notlügen. Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch. Der Satz «Ein Dreieck hat drei Ecken» ist eine wahre Aussage, weil sie zutrifft und ein Dreieck zwingend drei Ecken hat. Der Satz «9 ist eine Primzahl» hingegen ist eine falsche Aussage, weil man 9 durch 3 teilen kann, eine Primzahl aber nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist.

Dabei ist eine Aussage nicht zwingend sprachlich formuliert. Auch eine korrekte Gleichung – zum Beispiel $2 + 2 = 4$ – ist eine wahre Aussage. Eine falsch gelöste Gleichung – zum Beispiel $2 + 2 = 3$ – ist eine falsche Aussage. Wenn die Gleichung eine Variable enthält – zum Beispiel $2x + 5 = 11$ –,

[1] Auf Spezialfälle wird hier nicht weiter eingegangen.

kann man nicht sagen, ob sie wahr oder falsch ist. Das kann man erst bestimmen, wenn man die Variable aufgelöst hat: 2x + 5 = 11 wird dann eine wahre Aussage, wenn man für x 3 einsetzt.

Aussagen sind in der Mathematik Sätze, die keinen Interpretationsspielraum zulassen. Ein Satz wie «Das ist gross» ist in der Mathematik (und in der Logik) keine Aussage, weil man nicht bestimmen kann, ob der Satz wahr oder falsch ist. Dafür fehlt eine Referenzangabe. Würde der Satz hingegen «1 m ist länger als 50 cm» heissen, handelt es sich um eine wahre Aussage, weil dieser Aussage ein eindeutiger Wahrheitswert (wahr – falsch) zugeordnet werden kann.

In der Mathematik gibt es einfache und zusammengesetzte Aussagen. Eine einfache Aussage umfasst einen einzigen Sachverhalt: «2 + 2 = 4». Eine zusammengesetzte Aussage bringt mehrere Sachverhalte zusammen, zum Beispiel durch eine Präzisierung: «2 + 2 = 4 und damit die Hälfte von 8.»

Wenn eine Aussage bei jeder Interpretation, das heisst immer, wahr ist, ist sie allgemeingültig.

Einen Sonderfall von Aussagen stellt die Verneinung dar. Die sprachlich negativ formulierte Form kann dennoch eine wahre Aussage sein: «Das ist kein Dreieck» ist dann eine wahre Aussage, wenn beispielsweise ein Kreis gezeigt wird. Eine falsche Aussage wäre es, wenn auf ein Dreieck gezeigt würde.

Aussagen können auch miteinander verknüpft werden. Dabei sind folgende fünf verschiedene Verknüpfungsarten bedeutsam:

1) UND-Verknüpfung: «6 ist eine gerade Zahl UND 6 ist kleiner als 7.» (beide Teilaussagen sind zugleich wahr).
2) ODER-Verknüpfung: «6 ist eine gerade Zahl ODER kleiner als 10.» (mindestens eine Teilaussage ist wahr).
3) ENTWEDER-ODER-Verknüpfung: «Entweder ist 15 durch 3 ODER durch 4 teilbar.» (eine Teilaussage ist wahr und die andere ist zugleich falsch).
4) WENN-DANN-Verknüpfung: «Wenn 81 durch 9 teilbar ist, dann ist 81 durch 3 teilbar.» (wenn dann falsch, wenn A (Voraussetzung) wahr und B gleichzeitig falsch. Sonst , wenn A, dann B wahr).
5) GENAU-WENN-DANN-Verknüpfung: «81 ist teilbar durch 9 genau dann, wenn die Quersumme von 81 durch 9 teilbar ist. » (Diese Aussage ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben).

Verknüpfungen von Aussagen führen ihrerseits zu neuen wahren oder falschen Aussagen.

Verstehen wahrer Aussagen als kognitive Herausforderung

Aussagen bezüglich ihres Wahrheitsgehaltes zu überprüfen, ist kognitiv anspruchsvoll und setzt entsprechendes Vorwissen voraus. Dies gilt insbesondere auch für junge Kinder. Nur zu unterscheiden, ob eine Aussage wahr oder ob sie falsch ist, ist dabei noch relativ einfach. Der erste Schritt dazu

ist die Überprüfung des Wahrheitsgehaltes von Aussagen. Die Überprüfung mündet in eine Zurückweisung der Aussage (falsch) oder in eine Bestätigung (wahr). Wahre Aussagen zu identifizieren, bedeutet demnach, in Bezug auf den Inhalt in Verbindung mit fachlichem Vorwissen eine begründete Beurteilung und Einschätzung zu treffen.
Der nächste, kognitiv anspruchsvollere Schritt ist die Beurteilung des Wahrheitsgehaltes von Negationen, also von Verneinungen. Bei solchen Aussagen muss der Wahrheitsgehalt in Beziehung gesetzt werden zur vorhandenen Form, also der Negation. «Das ist KEIN Dreieck» ist nicht nur etwas völlig anderes als «Das ist ein Dreieck», sondern lässt zudem einen grösseren Möglichkeitsraum zu: Was ist es denn, wenn es KEIN Dreieck ist? Gerade Negationen sind aber für die Mathematik sehr bedeutsam, weil sie den Möglichkeits- und Wertebereich präzisieren und die Voraussetzungen klären.
Aussagen miteinander zu neuen Aussagen zu verknüpfen, ist je nach Verknüpfungsart unterschiedlich anspruchsvoll. Am einfachsten ist die UND-Verknüpfung, weil dabei beide Teilaussagen wahr sein müssen, damit die neue, verknüpfte Aussage wahr wird. ODER-Verknüpfungen hingegen können eine Entscheidung verlangen, aber nicht zwingenderweise, wie dies für die ENTWEDER-ODER-Verknüpfungen gilt. Die WENN-DANN-Verknüpfungen zeigen einen zeitlichen Verlauf von Voraussetzung und Folge bzw. Konsequenz an und sind ebenfalls anspruchsvoll, weil sorgfältig überlegt werden muss, was die Voraussetzung ist und welches die Konsequenz. Die GENAU-WENN-DANN-Verknüpfungen schliesslich präzisieren diese Voraussetzung-Folge-Struktur in zwingender weise. Etwas gilt NUR GENAU-WENN-DANN.

Didaktische Umsetzung im Kindergarten

Voraussetzung für das Spielen mit wahren und falschen bzw. geschwindelten Aussagen ist ein entsprechendes fachliches Basiswissen. So wie der Rabe Socke im Bilderbuch ab und zu ein wenig schwindelt, lassen sich auch mathematische Aussagen konstruieren, wahre und falsche. Dies geschieht beispielsweise entlang von mathematischen Definitionen.
Die Kinder werden aufgefordert, bestimmte Formen oder Körper im Kindergarten zu suchen und in den Stuhlkreis zu bringen. Die Ergebnisse der Suche werden präsentiert, zum Beispiel mit «Das ist ein Kreis». Zeigt das Kind dabei auf einen Kreis, ist die Aussage wahr. Nun kann natürlich begründet werden, warum dies ein Kreis ist, und dabei muss auf mathematische Eigenschaften und Beziehungen zurückgegriffen werden, durch welche ein Kreis definiert ist, zum Beispiel «Das ist ein Kreis, WEIL er keine Ecken hat». Das ist zwar eine korrekte (wahre) Aussage und richtige Begründung, aber sie ist nicht hinreichend. Eine Ellipse hat ja auch keine Ecken. Die Begründung «Das ist ein Kreis, weil da alle Punkte auf der Linie den gleichen Abstand zum Mittelpunkt haben» wäre hingegen hinreichend.

Ausgehend von solchen Formensuchen können wahre und falsche Aussagen vorgestellt, bezüglich ihres Wahrheitsgehalts geprüft und eingeschätzt werden, wobei die Einschätzung mathematisch begründet werden muss. Gearbeitet wird damit an der im Lehrplan 21 formulierten Kompetenz MA.2.B: «Die Schülerinnen und Schüler können Aussagen und Formeln zu geometrischen Beziehungen überprüfen, mit Beispielen belegen und begründen.» (D-EDK, 2014, S. 23).

Ein anderes Beispiel ist das Überprüfen von Operationen, zum Beispiel entlang der sogenannten Schachtelaufgaben: Es liegen 3 Muggelsteine auf dem Tisch. Diese werden nun durch eine Schachtel zugedeckt. Die Kindergartenlehrperson legt 2 Muggelsteine dazu, ohne die Schachtel aufzudecken, und fragt danach, wie viele Muggelsteine nun unter der Schachtel liegen. Die Antwort «5» muss nicht nur bezüglich ihres Wahrheitsgehalts geprüft werden, sondern die Einschätzung muss auch begründet werden, und zwar über mathematische Gesetze und Beziehungen, zum Beispiel «Es müssen 5 sein, weil man weiterzählen kann: 3, 4, 5» Oder: «Es müssen 5 sein, weil 3 + 2 = 5.»

Abbildung 13: Schachtelaufgabe

Weniger geeignet für solche Lernanlässe, um den Wahrheitsgehalt von Aussagen zu prüfen und die Antwort begründen zu lernen, sind hingegen mathematische Konventionen oder Strategien. Ob man eine Strichliste oder ein Zahlzeichen verwendet, um Muggelsteine zu zählen, ist eine Vorgehensweise, kein mathematisches Gesetz. Und ob man die sieben mit oder ohne Querstrich schreibt, ist lediglich eine Abmachung und keine mathematische Definition.

Vier Geschichten konkret

Erzählt werden können nun wiederum die bekannten vier Geschichten (Brunner, 2016a):

1. «Das-ist-es-Geschichte»
   Das stimmt nicht; das ist kein Dreieck!
2. «Es-geht-so-Geschichte»
   Ein Dreieck hat drei Ecken.
3. «Es-geht-so-weil-Geschichte»
   Diese Figur hat vier Ecken, deshalb kann es kein Dreieck sein.

4. «Weil-es-so-geht-MUSS-Geschichte» oder «Immer-wenn-dann-Geschichte»

   Ein Dreieck muss immer drei Ecken haben.

Mathematisches Argumentieren im Kindergarten lässt sich in verschiedenen Einheiten und auch in Phasen von Lernberatung einbauen und braucht nicht zwingend lange Sequenzen. Wichtig ist, dass Begründungen zunehmend mathematisch sind und damit auf Definitionen zurückgeführt werden können. Das kann – wie das Beispiel vom Raben Socke zeigt – durchaus lustvoll und spielerisch mit «wahren» und «unwahren» Aussagen verbunden werden.

8.2. Literatur

Brunner, E. (2016). Bin ich ein Teil von dir? Kindergartenkinder lernen mathematisch argumentieren. *4 bis 8*, *2016*(8), 37–39.

D-EDK. (2014). *Lehrplan 21. Mathematik*. Bern: Projekt Lehrplan 21.

Moost, N., & Rudolph, A. (2001). *Alles echt wahr! Oder Rabenstarke Schwindeleien für alle Gelegenheiten*. Stuttgart: Esslinger.

8.3. Beispiele aus der Praxis

Svenja Grössl, Janina Baumgartner, Jasmin Bürgy, Evi Fischer, Lucy Gappisch, Tanja Hartmann, Jasmin Karrer, Deborah Limi, Melissa Maurer, Bettina Mösli und Esther Brunner

Pakete packen

Als Einstieg werden verschiedene Gegenstände im Kreis geordnet. Die Vorschläge der Kinder zu Kriterien für das Herstellen einer Ordnung werden gesammelt. Die Lehrperson fordert die Kinder sogleich auf, die Gegenstände nach diesem vorgeschlagenen Kriterium zu ordnen. Hierbei werden Kriterien wie Farbe oder Grösse einbezogen. Dann erteilt die Lehrperson den Kindern die Aufgabe, die Gegenstände nach dem Gewicht zu ordnen.

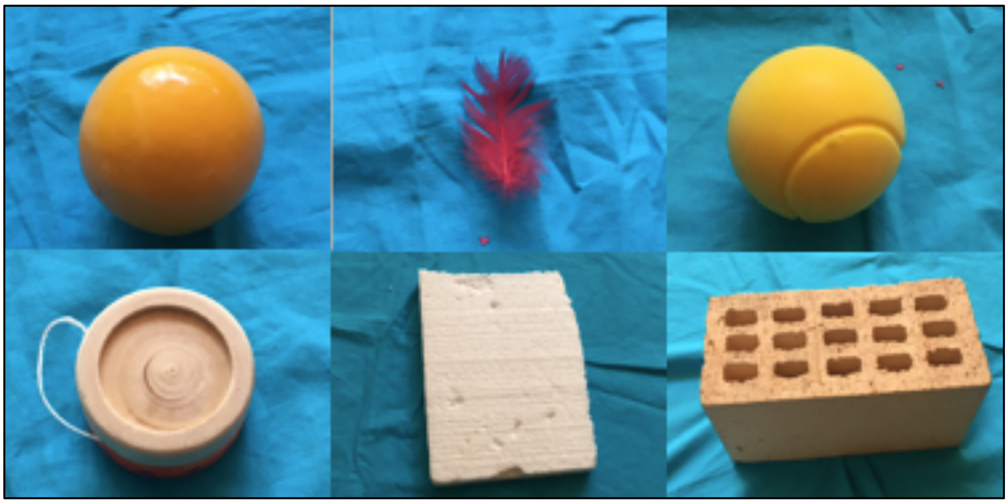


Abbildung 14: Gegenstände zum Ordnen

Nun machen sich die Kinder auf den Weg und suchen im Kindergarten Gegenstände, die sie zu den verschiedenen vorgegebenen Gegenständen legen. Das Gewicht des gesuchten, zugeordneten Gegenstandes soll demjenigen im Kreis entsprechen. Sind alle Kinder zurück, so soll jedes Kind kurz erklären, warum es diesen gefundenen Gegenstand demjenigen im Kreis zugeordnet hat, warum es also glaubt, dass diese Gegenstände vom Gewicht her zusammenpassen.

In der zweiten Lektion stellt die Lehrperson nicht nur die sechs Gegenstände zur Verfügung, sondern auch Pakete in unterschiedlichen Grössen. Gemeinsam wird besprochen, was Sinn ergibt, nämlich die Feder in ein kleines Päckchen zu packen und nicht in ein riesiges. In einer Kleingruppenarbeit bekommen die Kinder dann jeweils einen Gegenstand und sollen diesen passend verpacken. Gemeinsam wird sodann besprochen, wie die Sachen jeweils verpackt wurden und warum das jeweilige Paket für den Gegenstand ausgewählt wurde.

Abbildung 15: Gegenstände zum Ordnen

In der dritten Lektion werden die verschiedenen Pakete im Kreis herumgegeben, und die Kinder sollen überlegen, in welchem Paket welcher Gegenstand enthalten sein könnte. Die Ideen werden gesammelt und die Lehrperson fragt gezielt nach, warum die Kinder glauben, dass sich in dem bestimmten Paket der erwähnte Gegenstand befindet. Die verschiedenen Pakete werden im Kreis ausgelegt, und die Kinder dürfen den Paketen nun Bildkärtchen zuweisen, auf denen die Gegenstände aus den Paketen abgebildet sind. Berücksichtigen muss die Kindergartenlehrperson dabei, dass diese Aufgabe für einzelne Kinder sehr anspruchsvoll sein kann, weil man dabei vom dreidimensionalen Objekt auf ein zweidimensionales Bild wechseln muss.

Die Lehrperson kann hier Fehler einbauen. Die Kinder müssen dann begründen, warum das nicht geht bzw. warum die Verpackung nicht optimal passt:

LP: Können wir auch einen Tennisball in den Briefumschlag packen?

Kind: Nein ...

LP: Warum geht das nicht?

Kind: Weil der Ball viel zu gross ist für den Umschlag, und wenn wir den Ball da hinein tun würden, würde das Papier reissen, weil der Ball ja viel zu gross ist.

Erzählt werden können damit auch «Lügengeschichten», die als Ausgangslage für mathematisches Argumentieren dienen:

LP: In meinem Paket steckt ein Fussball.

Kind: Nein, das ist nicht möglich. Da kann kein Fussball drin sein.

LP: Warum nicht?

Kind: Weil das Paket lang ist und auf der kurzen Seite ist kein Platz für einen Fussball. Da müsste man den Fussball zusammenlegen.

Formenmonster

Auch diese Aufgabenreihe ist für drei Lektionen vorgesehen. Anfangs, in der ersten Lektion, gibt es vier Aufgaben in Form eines Postenlaufs für die Kinder. Zuvor empfiehlt sich aber ein Sammelspiel, das zum Thema hinleitet. In diesem Fall ist es eine verdeckte Kiste, in der die Kinder eine Figur von einer bestimmten Form ertasten müssen. Anschliessend kann anhand eines KIM-Spiels weiter an den Formen und deren Benennung gearbeitet werden, indem ein Kind einen Gegenstand wegnimmt und die anderen erraten müssen, welcher fehlt, und benennen, wie er heisst.

Der erste Posten im Postenlauf ist ein Arbeitsblatt, auf dem die Kinder die gleichen Formen in einer Farbe anmalen und hernach eintragen, wie viele von welchen Formen sie finden können.

Das Formenraster ist der zweite Posten: Hier werden, nach Farbe und Form sortiert, die jeweils passenden Formen an die richtige Stelle gelegt.

Am dritten Posten dürfen die Kinder eine Form in Rasierschaum nachzeichnen.

Der vierte Posten ist der sogenannte Formenweg. Hierbei gibt das eine Kind einen Weg vor, den das andere dann ablaufen muss.

Abbildung 16: Posten 1 bis 4: Formen anmalen und zählen, Formen in Rasierschaum schreiben, Formenraster, Formenweg

In der zweiten Lektion steht nun das Argumentieren im Vordergrund. Damit es den Kindern leichter fällt, bekommen sie zur Unterstützung und Visualisierung des argumentativen Dreischritts eine farbliche Denkstütze. Dieser lautet wie folgt:

Stimmt/ stimmt nicht … weil … muss immer …

Begonnen wird mit dem allseits bekannten «Zige, zage, zoge» im Kreis. In der Hand haben die Kinder aber keinen Stein oder Ähnliches, sondern eine kleine Form. Es stehen sechs verschiedene Formen zur Auswahl, nämlich Sechseck, Quadrat, Kreis, Rechteck, Trapez, Dreieck. Das Kind wählt zwei von sechs Figuren aus, geht durch den Kreis und sagt folgenden Spruch auf:

Kind 1: Zige, zage, zoge, welli Form isch obe? (je nach Formen, die gewählt wurden, gibt es nun die beiden Formen zur möglichen Antwort, beispielsweise:) Dreieck oder Kreis?

Kind 2: Ich denke, das Dreieck ist oben.

Kind 1: Schaut nach und zeigt die Form:

Das stimmt, das ist ein Dreieck, weil es drei Ecken und drei Seiten hat, und das hat es.

Das stimmt nicht, weil diese Form vier Ecken hat, deshalb kann es kein Dreieck sein. Ein Dreieck muss immer drei Ecken und drei Seiten haben.

Je nach richtiger oder falscher Antwort ist das gleiche Kind nochmals oder das andere Kind dran. Die Kinder werden nun in Zweiergruppen eingeteilt. Sie bekommen einen gemeinsamen Spielplan, jedes Kind hat eine Farbe. Dann spielen die Kinder abwechselnd zu zweit in ihrer Kleingruppe das Zige-zage-zoge-Spiel. Wenn das ratende Kind jeweils richtigliegt, darf es einen Schritt weiter auf dem Spielfeld vorrücken. Wer zuerst im Ziel ist, hat gewonnen.

Abbildung 17: Zige,-zage,-zoge in der Partnerarbeit

Zum Abschluss gibt es ein gemeinsames Rätsel im Kreis:
Die Lehrperson wählt eine Figur aus (beispielsweise ein Sechseck) und behauptet: «Das ist ein Kreis, stimmt das, Marie?»
Marie: «Nein, das stimmt nicht, das ist kein Kreis, weil diese Figur sechs Ecken hat, deshalb kann es kein Kreis sein. Ein Kreis muss immer rund sein und darf keine Ecken haben.»

In der dritten Lektion bekommen die Kinder im Kindergarten Besuch von den Formenmonstern. Zum Einstieg wird nochmals das (Formen-)Zige-Zage-Zoge aus der vorherigen Lektion gespielt. Dann werden die verschiedenen Monster vorgestellt. Sie heissen jeweils so wie die Form, die sie darstellen. Die Kinder werden gefragt, was diese Formenmonster wohl am liebsten fressen. Die richtige Antwort bezeichnet die Formen, die wie die Monster selbst aussehen.
Nun werden von der Lehrperson verschiedene Formen vor die Monster gelegt und Behauptungen aufgestellt:

LP: Das Kreismonster wird vier Kreise fressen! (Vor dem Kreismonster liegen aber vier Quadrate.)

Kind: Das stimmt nicht, weil hier zwar vier Dinge (Anzahl stimmt also) liegen, jedoch sind das keine Kreise. Ein Kreis muss immer rund sein und darf keine Ecken haben, diese Figuren hier haben vier Ecken und vier gleich lange Seiten, deshalb können es keine Kreise sein.

Hierbei sollte die Lehrperson immer wieder auf den Argumentationsverlauf der Kinder achten und diesen gegebenenfalls verbessern.

Abbildung 18: Die Formenmonster

Schwindelt er schon wieder oder doch nicht?

Der kleine Rabe Socke kommt in den Kindergarten und begrüsst die Kinder, die ihn schon kennen und wissen, dass er gerne schwindelt. Er hat Bildkarten mit Ziffern von 1 bis 10 mitgebracht. Nun behauptet er, er könne schon sehr gut zählen, wie ein Profi eben. Die Lehrperson fordert ihn zum Zählen auf. Der Rabe Socke lehnt ab und fordert die Kinder auf herauszufinden, ob er nun gleich richtig zähle oder ob er schwindle, denn das mache ihm so grossen Spass.

Der Rabe Socke: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. So ist das richtig.

Kinder: Nein, das stimmt nicht!

Der Rabe Socke: Doch, doch, das stimmt so!

LP: Ich glaube auch, dass etwas nicht gestimmt hat. Was ist denn falsch gewesen? Hat es jemand mitbekommen?

Kind: Der Rabe Socke hat die 3 vergessen!

LP: Genau, wie hat er denn gezählt? (Hier dürfen die Kinder die Reihenfolge nun mit den Bildkärtchen nachlegen und dann die Frage beantworten.)

Kind: Der Rabe Socke hat die 4 vergessen, weil nach der 3 immer die 4 kommen muss. Weil eins mehr ist als 3.

LP: Ganz genau, beim Zählen kommt nach der 3 immer die 4.

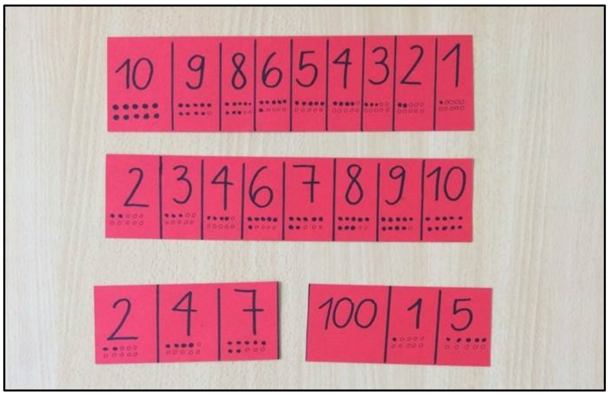


Abbildung 19: Nachgelegte Reihenfolge

Bei diesem Gespräch kann die Lehrperson die Kinder zum mathematischen Argumentieren führen. Anschliessend ist ein Kind an der Reihe, das schwindeln darf. Dazu bekommt es von der Lehrperson eine Zahlenreihe vorgelegt, die es den anderen Kindern vorlesen darf. Diese passen genau auf, benennen und begründen im Folgenden den Fehler.

Erweitert werden kann die Aufgabe, indem der Rabe Socke den Kindern nicht mehr «nur» einfache Zahlenreihen aufsagt, sondern von einer Zahl den vermeintlichen Vorgänger und Nachfolger angibt:

Der Rabe Socke: Vor der 8 kommt die 6 und nach der 8 kommt die 11.

LP: Stimmt das?

Kinder: Nein, das stimmt nicht!

LP: Was stimmt denn nicht?

Kind: Vor der 8 kommt nicht die 6 und nach der 8 kommt nicht die 11. (Die Kinder sollen nun wieder mit Bildkärtchen die 8 und deren Nachbarn legen.)

LP: Warum stimmt das nicht, was der Rabe gesagt hat?

Kind: Weil vor der 8 immer die 7 kommt, weil 7 eins weniger ist als 8 und nach der 8 immer die 9 kommt, weil 9 eins mehr ist als 8.

Nach weiteren Aufgaben ist der Rabe Socke sehr vergnügt und lobt die Kinder, dass sie schon richtige Zähldetektive und -detektivinnen sind. Zur Belohnung erhalten die Kinder eine Urkunde, die der Rabe Socke selbst unterschrieben hat. Zum Abschluss verteilt er diese. In die vorgegebenen Kästchen dürfen die Kinder noch die Zahlen 1 bis 10 schreiben bzw. deren Anzahl einzeichnen.

Abbildung 20: Nachgelegte Reihenfolge

Schwindeln und lustvoll Lügengeschichten erzählen, um sie nachher auch mit guten Argumenten aufzulösen, macht doch einfach Spass!

September 2018

Kontakt

Pädagogische Hochschule Thurgau
Unterer Schulweg 3
Postfach
8280 Kreuzlingen 2
Tel. +41 (0)71 678 56 56
info@phtg.ch
phtg.ch

thurgauwissenschaft