

## «Ist das ein richtiges Viereck?»

### Vom Umgang mit Formen und Begriffen im Kindergarten

*Mathematisch handeln und argumentieren mit unterschiedlichen geometrischen Formen ist eine wichtige Tätigkeit im Bereich der frühen mathematischen Bildung. Dadurch sollen Kompetenzen im Bereich Formerkennung aufgebaut werden. Dies kann ganz unterschiedlich realisiert werden. Für die Lehrperson gilt es dabei, ein paar grundlegende fachliche und fachdidaktische Aspekte zu berücksichtigen, die dazu dienen, die Erkundungen und das nachfolgende Argumentieren mit den Kindern besser planen, strukturieren, begleiten und fördern zu können. Dies wird im nachfolgenden Text anhand von zahlreichen Beispielen aus dem Kindergarten genauer dargestellt.*

#### Ein Viereck hat vier Ecken... – oder?

Lisa und Ben, zwei grosse Puppen sind zu Besuch im Kindergarten. Die Kindergartenlehrperson spielt



Abbildung 1: Lisa und Ben (Foto: E. Brunner)

mit den beiden Puppen und inszeniert ein Gespräch zwischen ihnen. Lisa und Ben streiten. Vor ihnen liegt eine Form, die *beinahe* aussieht wie ein Viereck, allerdings sind die Ecken abgerundet. Ben behauptet: «Das ist ein Viereck», aber Lisa entgegnet: «Nein, das ist das doch kein Viereck!» Wer von den beiden hat nun Recht? Die Kindergartenkinder mischen sich ins Gespräch der beiden Puppen ein und bringen Argumente vor zu ihrer Einschätzung der Aussagen von Ben und Lisa. Emma sagt: «Lisa

hat Recht. Ein Viereck muss *immer* vier Ecken haben und das hier – sie zeigt auf die abgerundeten Ecken – sind keine Ecken, die sind ja rund.» Max entgegnet: «Ich finde, dass Ben auch ein bisschen Recht hat. Es ist ja *beinahe* ein Viereck. Es sieht so aus, nur die Ecken müssten eckig sein, aber es hat vier Seiten und hat ja auch schon ein bisschen *wie* vier Ecken.»

Was in diesem Gespräch und der Argumentation der beiden Kinder deutlich wird, sind die konstituierenden Merkmale eines Vierecks, also die Merkmale, die darüber entscheiden, ob eine Form gemäss Definition ein Viereck ist oder nicht. Nach der mathematischen Definition weist jedes Viereck vier Seiten, vier Ecken und vier Winkel auf und ist eine geschlossene Form, d. h. es handelt sich um einen geschlossenen Streckenzug aus vier Strecken (Seiten), der vier Punkte (Ecken) miteinander verbindet. Gemäss der Definition ist die Aussage von Emma somit vollständig und korrekt, während Max eines



der definitorischen Merkmale (Ecken, d. h. Verbinden von vier Punkten mit einem Streckenzug, was zu Ecken in den Punkten führt) verletzt bzw. vernachlässigt. Seine Argumentation ist somit mathematisch nicht korrekt, weil er nicht alle definitorischen Merkmale berücksichtigt. Er weiss dies aber offensichtlich, denn er weist in seiner Argumentation darauf hin, dass es sich *beinahe* um ein Viereck handle, weil es ja 'ein bisschen *wie* vier Ecken' habe. Dies ist sein Versuch, den Streit zu schlichten. Es ist also – auch für Max – nur *beinahe* ein Viereck und damit folglich kein 'richtiges' Viereck.

### Typische, untypische und Nicht-Beispiele

Wenn Kinder Formen kennen- und benennen lernen, wird in der frühen Bildungsstufe i.d.R. ein Beispiel verwendet. Die Kinder nehmen die Form wahr, beschreiben sie mit ihren zentralen Merkmalen und lernen die Form an diesem Beispiel benennen: «Dies ist ein Viereck.» Beim Beschreiben der Merkmale dieser Form ist es zentral, dass die definitorischen Merkmale erarbeitet werden, im Fall des Vierecks also der geschlossene Streckenzug – ein Viereck darf nicht irgendwo offen sein –, der vier Punkte miteinander verbindet und damit vier Ecken und vier Seiten erzeugt. In einem nächsten kognitiven Schritt ist es nun wichtig, dass Kinder lernen, von diesem einen Beispiel ausgehend zu abstrahieren und zu verallgemeinern, d. h. ein 'allgemeines Viereck' in den Blick zu nehmen, d. h. jedes Viereck, und nicht nur dieses eine spezielle Beispiel aus dem ersten Einstieg. Dazu hilft zum einen, die Form zu variieren, z. B. zu verkleinern, zu vergrößern oder unterschiedliche Vierecke zu betrachten. Und zum anderen kann es fruchtbar sein, durch ein Gegenbeispiel die der Figur grundgelegten definitorischen Merkmale auszuscharfen. Gefragt wird beispielsweise anhand eines Dreiecks, ob es sich dabei auch um ein Viereck handelt. Auch ein Dreieck ist ein geschlossener Streckenzug, aber er verbindet drei Punkte miteinander und erzeugt somit drei Ecken und drei Seiten anstelle von vier. Dies kann als Argumentation eingebracht und verlangt werden. Die Puppe Ben sagt deshalb auf Lisas Behauptung, dass dies auch ein Viereck sei, obwohl ein Dreieck vor den beiden liegt, zu Recht: «Nein, das stimmt nicht! Schau, das hat ja nur drei Ecken. Es müssten vier sein, sonst kann das kein Viereck sein.»

Unterhauser (2019) unterscheidet im Zusammenhang mit Formenerkennung die Beispiele und die Nicht-Beispiele voneinander. Die Beispiele selbst können in typische und untypische Beispiele eingeteilt werden. Typische Beispiele für den Begriff 'Viereck' sind Quadrate oder Rechtecke (Formen siehe Anhang Kopiervorlagen):

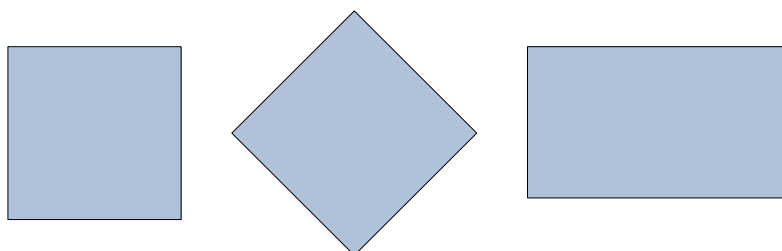


Abbildung 2: Typische Beispiele 'Viereck' (vgl. Unterhauser, 2019)

Als ‚untypische Beispiele‘ des Begriffs ‚Viereck‘ bezeichnet Unterhauser (2019) allgemeine Vierecke, die nicht der typischen Repräsentation eines Quadrates oder Rechtecks entsprechen, aber sämtliche definitorische Merkmale eines Vierecks aufweisen. Es sind dies beispielsweise Drachenvierecke, Trapeze, Parallelogramme, Rauten oder auch konkave Vierecke, bei denen nur genau eine Diagonale im Innern der Figur liegt, während die andere ausserhalb der Figur liegt.

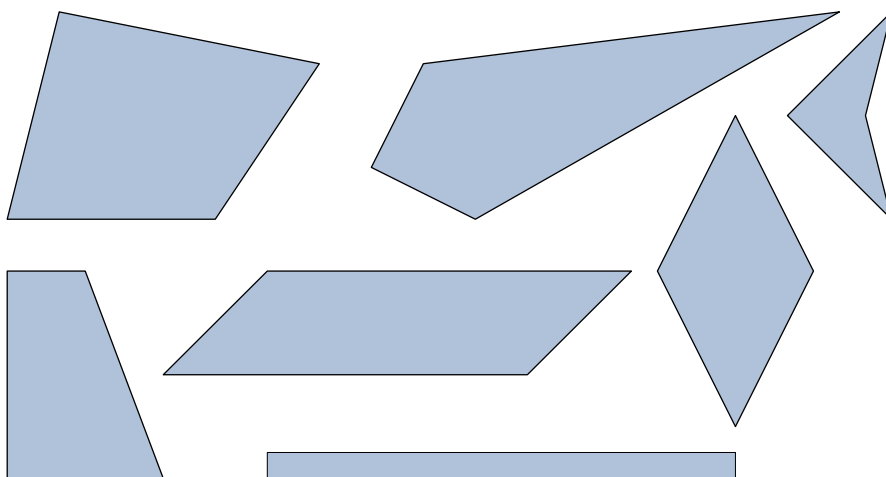


Abbildung 3: Untypische Beispiele ‚Viereck‘ (vgl. Unterhauser, 2019)

Unter ‚Nicht-Beispielen‘ werden solche verstanden, die mindestens eines der definitorischen Merkmale verletzen, beispielsweise weil der Streckenzug nicht geschlossen ist oder weil die Ecken abgerundet und der geschlossene Streckenzug somit nicht nur vier Punkte geht. Besonders interessant sind die Nicht-Beispiele dann, wenn sie annäherungsweise als Viereck interpretiert werden könnten, aber gemäss Definition keine Vierecke sind.

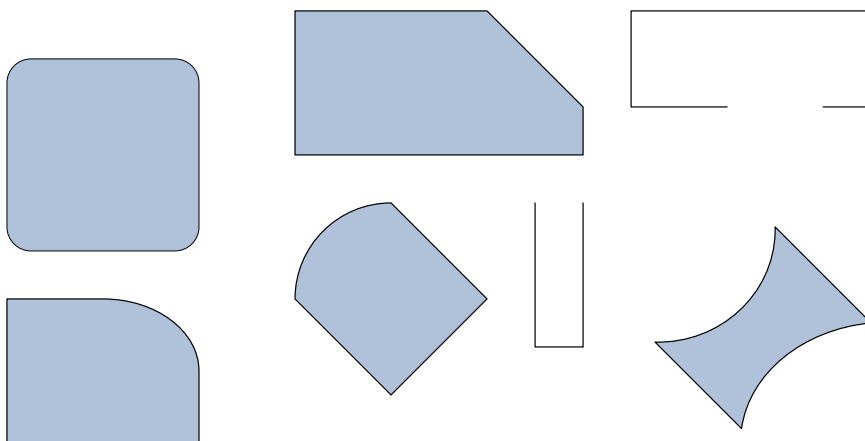


Abbildung 4: Nicht-Beispiele ‚Viereck‘ (vgl. Unterhauser, 2019)

Gerade bei diesen Nicht-Beispielen, die zumindest ein zentrales Merkmal der Definition einer bestimmten Figur verletzen, ist eine intensive Betrachtungsweise und ein gemeinsames Erkunden und Begründen besonders fruchtbar und interessant: Wie ist das eigentlich mit diesen 'verletzten' oder nicht ganz perfekten Formen? Sind dies dann beispielsweise auch Dreiecke oder Vierecke oder eben doch nicht? Diese Frage lässt sich im Fall von typischen Beispielen noch ohne zentrale definitorische Merkmale beantworten, im Fall von untypischen Beispielen hingegen braucht die Beantwortung der Frage die Reflexion und Berücksichtigung ebendieser definitorischer Merkmale: Wann ist ein Viereck ganz genau ein Viereck? Was muss erfüllt bzw. gegeben sein, damit man eine Figur als Viereck bezeichnen darf? Damit wird die Antwort klar. Im Fall von Nicht-Beispielen verhält es sich ähnlich: Hier ist meist auf den ersten Blick schon klar, dass es sich nicht um die gesuchte Form handelt, weil sie zumindest eines der zentralen notwendigen Merkmale verletzt. Aber die Begründung, warum diese Form nun kein Viereck ist, benötigt das Erkennen und Verwenden der zentralen bestimmenden Merkmale: «Das ist kein Viereck, weil die Ecken hier abgerundet sind und ein Viereck vier Ecken haben muss.»

### **Formen suchen, zeichnen, ausschneiden, sortieren und benennen**

Formen mit den sie definierenden Merkmalen müssen im Kindergarten intensiv bearbeitet werden. Als zentrales Ziel sollen die Schülerinnen und Schüler Begriffe und Symbole verstehen und verwenden lernen (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016, S. 11). Dabei sollen die Kinder lernen, verschiedene Formen und Körper wie Kreis, Dreieck, Rechteck, Quadrat, Würfel und Kugel zu benennen. Zum Benennen gehört aber mehr als lediglich, ein bestimmtes Wort einer Form zuzuweisen zu können. Es geht dabei um Begriffsbildung. Ein Begriff ist nicht einfach ein Wort. Man spricht nur dann von einem Begriff, wenn damit nicht nur ein einzelner Gegenstand bezeichnet wird, sondern eine ganz Kategorie oder eine Klasse gemeint ist, in die man den konkreten Gegenstand einordnen kann (vgl. Benz, Peter-Koop, & Grüssing, 2015, S. 185 ff.). Der Begriff Viereck steht somit für eine ganze Klasse von Vierecken und nicht nur für ein einzelnes, bestimmtes Beispiel. Aber dieses einzelne, bestimmte Beispiel kann als 'Viereck' in diesem Begriff eingeordnet werden.

Begriffsbildung ist ein anspruchsvoller und langfristiger Prozess, der durch den aktiven Umgang mit Objekten in Verbindung mit Sprache erfolgt (van Hiele, 1999). Deshalb ist es wichtig, dass Kinder in dieser frühen Phase mit Formen experimentieren, die zentralen Merkmale untersuchen und argumentieren lernen, was eine bestimmte Form charakterisiert. Im Kindergarten kann dies mit verschiedenen reichhaltigen mathematischen Aktivitäten angeregt werden. Formen werden gezeichnet, auf verschiedenen Bildern und Fotos gesucht und geordnet, auf dem Geobrett mit Gummis gespannt, geknetet, mit Steckperlen nachgebildet, ausgeschnitten usw., wie dies die Fotos aus dem Kindergarten zeigen.



Abbildung 5: Verschiedene Aktivitäten (Ideen und Fotos: S. Parizzi)

Dabei werden die zentralen bestimmenden Merkmale einer bestimmten Form herausgearbeitet und es kann jederzeit begründet werden, warum es sich bei einer bestimmten Form um ein Viereck, Dreieck oder einen Kreis handelt. Entsprechend der kognitiven und feinmotorischen Fertigkeiten der Kinder gelingen beim Zeichnen, Schneiden, Kneten oder Stecken typische und untypische Beispiele einer bestimmten Form. Kinder können herausgefordert und angeregt werden, untypische Formen zu erzeugen. Bei Nicht-Beispielen muss genauer geprüft werden, ob ein Kind erkennt, dass es sich um ein Nicht-Beispiel handelt (z. B. 'fast ein Viereck, nur hier nicht spitz') und ob das Nicht-Beispiel auf mangelnde feinmotorische Fertigkeiten oder fehlende Merkmalsdifferenzierung zurückzuführen ist.



Abbildung 5: Spiel «Guck über die Mauer» (Foto: S. Parizzi)

Im Spiel «Guck über die Mauer» werden weitere Eigenschaften (hier Farbe und Grösse) mit einer bestimmten Form verknüpft. Gesucht wird nach einem grossen grünen Dreieck. Wer ein solches auf seiner Karte hat, darf es mit einem Glasstein belegen. Gewonnen hat, wer zuerst eine Spalte mit Glassteinen belegt hat.

Denkbar ist auch eine Variation des Spiels, indem der Begriff nicht genannt werden darf, sondern eine vollständige

Beschreibung einer bestimmten Figur gegeben werden muss: «Ich suche eine Form, die drei Ecken und drei Seiten hat, klein und grün ist».

### Formen in Umgebung suchen, mitbringen, sortieren und benennen

Wenn die Form mit ihren sie definierenden Merkmalen bekannt ist, kann als nächster Schritt eine etwas anspruchsvollere Anwendung folgen: ein Formenspaziergang. Bestimmte Formen werden in der Umgebung gesucht, fotografiert, abgezeichnet oder markiert und gesammelt. Nun werden die gefundenen Formen sortiert und es muss begründet werden, weshalb diese zusammenpassen und warum andere nicht dazugehören. Dabei werden Formen benannt, ihre Merkmale in der Argumentation vorgebracht und dargelegt, typische, untypische und Nicht-Beispiele werden verwendet.

In einem Kindergarten bringen die Kinder zum Begriff «Viereck» die folgenden Beispiele von ihrem Formenspaziergang zurück:



Abbildung 7: Entdeckte «Vierecke» auf einem Formenspaziergang (Fotos: S. Parizzi)



Welche davon sind nun tatsächlich Vierecke? Nun muss argumentiert werden. Gerade bei den Nicht-Beispielen, bei denen zumindest ein bestimmendes Merkmal nicht zutrifft (in den Bildern links und rechts in der oberen Reihe), ist dies anspruchsvoll, weil herausgearbeitet werden muss, welches der bestimmenden Merkmale denn nicht erfüllt ist.

Berücksichtigt werden muss im Zusammenhang mit einem solchen Formenspaziergang grundsätzlich, dass hier nicht primär zweidimensionale Formen im Zentrum stehen, sondern dass in der Realität dreidimensionale Körper Gegenstand der Betrachtung sind. Empfohlen wird deshalb bei solchen Aktivitäten, dass – ausgehend von den räumlichen Objekten – der Fokus auf die Form der Fläche gerichtet wird (z. B. Benz et al., 2015; Kaufmann, 2010). Strenggenommen sind alle «Vierecke» auf den Bildern aus dem Formenspaziergang – bis auf die mit Farbe auf dem Boden aufgemalten in der Mitte oben – ja nicht Vierecke, sondern Quader. Der Fokus auf die Form der Fläche zu richten bedeutet deshalb, dass genau nachgefragt wird, wo denn nun genau ein Viereck zu erkennen ist. Dies ist beispielsweise bei der Oberfläche der Garagentür der Fall oder beim Belag der Tischtennisplatte. Im Kindergarten erfolgt eine solche Präzisierung nicht ausschliesslich im Gespräch, sondern wird auch in einer weiterführenden Aktivität vertieft, indem die Kinder in den Fotos die gesuchte Form einzeichnen und so den Blick auf die Fläche richten können: «Das hier ist ein Viereck, weil...».

### **Entwicklung und gezielte Förderung geometrischen Denkens**

Mit Aktivitäten dieser Art kann das geometrische Denken (weiter-)entwickelt und gezielt gefördert werden. Um Entwicklungsschritte erkennen und einen nächsten angemessen fördern zu können, ist es hilfreich, wenn die Lehrpersonen zentrale Niveaustufen des geometrischen Denkens kennen (Clements & Battista, 1992; van Hiele, 1984). Für die frühe Bildungsstufe sind insbesondere folgende vier Niveaustufen bedeutsam (Benz et al., 2015, S. 190 f.), an denen sich die Lehrpersonen orientieren können:

**Stufe 0: Partielle Wahrnehmung.** Kinder nehmen hier geometrische Formen zwar wahr, aber nur einige ihrer zentralen sichtbaren Eigenschaften. Figuren, die in der Gestalt ähnlich sind (z. B. Kreis und Ellipse) werden nicht sicher unterschieden.

**Stufe 1: Anschauungsgebundenes Denken.** Auf dieser Stufe werden geometrische Figuren ganzheitlich – z. B. anhand eines Prototyps, d. h. eines typischen Beispiels – erfasst und voneinander unterschieden, ohne dass bestimmte Eigenschaften verglichen werden. Eine typische Aussage ist deshalb: «Dies ist ein Viereck, weil es ganz genauso aussieht, wie das hier.» Auch wenn Fachbegriffe auf dieser Stufe verwendet werden können, beschreiben die Kinder die Figuren meist verbal ohne geometrische Fachbegriffe zu benutzen.

**Stufe 2: Analysieren geometrischer Figuren und Beziehungen.** Auf dieser Stufe stehen nicht mehr die ganzheitliche Erfassung anhand eines Prototyps im Vordergrund, sondern die Eigenschaften von geometrischen Objekten. Kinder können nun Einzelaspekte des Objektes unterscheiden. Dies ist Voraussetzung, um weitere, feinere Klasseneinteilungen vornehmen zu können. Sie können nun beispielsweise – auch wenn die Bezeichnungen noch fehlen – rechtwinklige von stumpfwinkligen Dreiecken unterscheiden. Beziehungen zwischen geometrischen Objekten und Eigenschaften und Klasseninklusion werden aber noch nicht erkannt, d. h. es wird beispielsweise noch nicht verstanden, dass jedes Quadrat auch ein Rechteck ist.

**Stufe 3: Erstes Ableiten und Schliessen.** Erst auf dieser Stufe werden nun auch Beziehungen zwischen den Eigenschaften von verwandten geometrischen Objekten erkannt. Nun sind Kinder in der Lage zu erkennen, dass ein Quadrat auch ein Rechteck ist, weil jedes Rechteck vier rechte Winkel und zwei je parallele gegenüberliegende Seiten hat. Dies trifft auch für das Quadrat zu, wobei die je parallelen gegenüberliegenden Seiten im Fall des Quadrates alle gleich lang sind, was das Quadrat zu einem besonderen Rechteck macht.

Diese vier Stufen der Entwicklung geometrischen Denkens helfen der Lehrperson, die gezeigten Fähigkeiten der Kinder, ihre Argumentation entsprechend ihrer Entwicklung einzustufen und zu verorten. Gleichzeitig dienen diese Stufen der individuellen Förderplanung, weil die vier Stufen entlang dieser Abfolge durchlaufen werden. Wer auf Stufe 2 kompetent handelt, sollte mit Aufgabenstellungen, die Kompetenzen aus Stufe 3 benötigen, im Sinne der Förderung im Bereich der Zone der nächsten Entwicklung (Vygotsky, 1969) herausgefordert werden. Die Niveaustufen der Entwicklung geometrischen Denkens haben deshalb sowohl diagnostisches wie förderorientiertes Potenzial.

Eine weitere Möglichkeit für präziseres diagnostisches Bestimmen gezeigter Kompetenzen ist die Orientierung an sogenannten Ausprägungsgraden einer bestimmten Kompetenz, wie sie Wollring et al. (2011) in ihrem diagnostischen Interview „EMBI Grössen und Messen, Raum und Form“ darlegen (Kurzzusammenfassung siehe auch Benz et al., 2015, S. 208 ff.). Diese Ausprägungsgrade definieren Meilensteine geometrischen Denkens für einzelne Kompetenzen und zeigen auf, welcher Denkschritt als nächster folgen muss. Gerade im Bereich des mathematischen Anfangsunterrichts ist die Orientierung an den vier Niveaustufen der Entwicklung geometrischen Denkens aber meist ausreichend, während für besondere Fragestellungen – z. B. im Zusammenhang mit sonderpädagogischen Fragen oder für eine Individualdiagnostik und individualisierte Förderplanung einzelner Kinder, z. B. von Risikokindern – der Bezug eines solch ausführlichen Einzelinterviews und die Orientierung an Ausprägungsgraden wertvolle Dienste erweist.

### **Sprechen über und Argumentieren mit untypischen und Nicht-Beispielen**

Kehren wir ganz zum Anfang zurück, zu Ben und Lisa und ihrem Streit über Formen. Mit dem nötigen Fachwissen kann die Lehrperson diesen Streit im Hinblick auf ganz bestimmte Zielsetzungen des mathematischen Kompetenzerwerbs der Kinder gestalten. Sie kann typische Beispiele einer Figur verwenden und daran anschauungsgebundenes Denken fördern und einen (neuen) Begriff am prototypischen Beispiel festigen. Sie kann untypische Beispiele verwenden und damit ein differenziertes Begriffsnetz aufbauen. Oder sie kann Nicht-Beispiele einbeziehen und daran – im Sinne der Förderung von Stufen 2 und 3 – die zentralen definitorischen Merkmale einer Figur herausarbeiten.

Statt des Streits der beiden Puppen eignen sich auch Werke aus dem Bereich der konkreten Kunst, wenn beispielsweise im Bild «Flora auf Sand» von Paul Klee nach Quadraten, Rechtecken, allgemein nach Vierecken gesucht wird: Wo handelt es sich nun um ein Nicht-Beispiel, um ein typisches oder



untypisches? Die Kinder können erneut argumentieren und mit Hilfe der zentralen bestimmenden Merkmale einer Form begründen, warum eine bestimmte Form kein Quadrat – oder zumindest kein richtiges – sei.

Mit Bildern wie demjenigen von Klee lassen sich insbesondere Erkundungen und Begründungen an Nicht-Beispielen vornehmen. Bilder von Künstlern

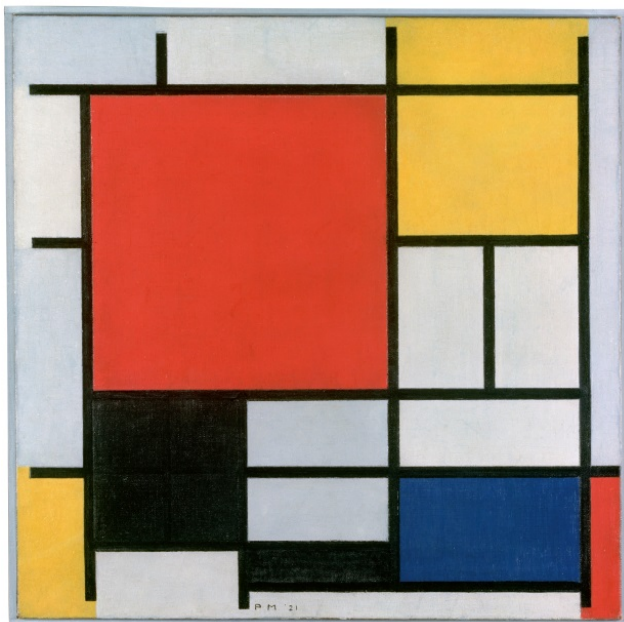


Abbildung 6: Komposition mit Rot, Gelb, Blau und Schwarz von Piet Mondrian ([https://de.wikipedia.org/wiki/Piet\\_Mondrian](https://de.wikipedia.org/wiki/Piet_Mondrian))

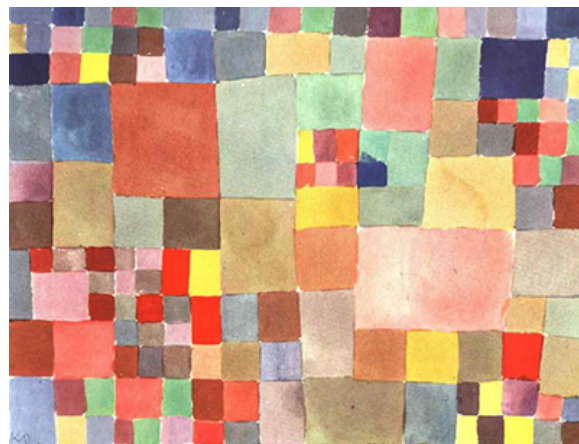


Abbildung 7: Flora auf Sand von Paul Klee (<http://www.paul-klee.org/de/flora-auf-sand/>)

wie Mondrian beispielsweise zielen eher auf typische Beispiele und auf Nicht-Beispiele ab, weniger auf untypische. Dies hängt damit zusammen, dass die Flächen in den Bildern von Mondrian konstruiert sind, während die Formen bei Klee oft Freihandzeichnungen ohne Konstruktion sind.

Die Verwendung und Betrachtung von typischen, untypischen und Nicht-Beispielen einer bestimmten Form ist auch deshalb so wichtig, weil viele didaktische Materialien lediglich typische Beispiele einer Form repräsentieren, selten untypische und kaum Nicht-Beispiele. Dies kann leicht zu einem eingeschränkten Begriffsverständnis führen, was es zu vermeiden gilt. Das vielfältige Handeln, Sprechen und Argumentieren mit und über typische, untypische und Nicht-Beispiele bestimmter Formen führt zu einem differenzierten Begriffsverständnis, einem eigentlichen Begriffsnetz mit Ober- und Unterbegriffen. Dabei ist der Oberbegriff vergleichbar mit der Spitze einer Pyramide (Aebli, 1981). In ihm enthalten sind sämtliche definierenden Eigenschaften, während in Unterbegriffen Präzisierungen und Spezialfälle gefasst werden.

Sprache begleitet das mathematische Tun und weil diese mathematische Sprache im frühen Alter erst erlernt werden muss, wird das Sprechen über das mathematische Tun von der Lehrperson modelliert und unterstützt. Sie ist mit ihrer Fachkompetenz diejenige Person, die neue Begriffe korrekt einführt und verwendet, im Wissen um die zentralen definitorischen Merkmale. Förderlich ist zudem, wenn die Lehrperson selbst als korrektes Sprachvorbild auftritt und Fachbegriffe nicht nur korrekt, sondern

auch präzise verwendet. Unpräzise Sprache kann sonst schnell zu einer Hürde für die Entwicklung eines tragfähigen Begriffsverständnisses führen (Meyer & Tiedemann, 2017). Aussagen wie ‚das Viereck‘ können dazu führen, dass Kinder das Wort ‚Viereck‘ lediglich als Name für *ein* Objekt verstehen und nicht für eine Gruppe von Vierecken und damit als Begriffswort (Unterhauser, 2019). Bei der Begriffsbildung geht es aber gerade darum, im Oberbegriff das Allgemeine zu fassen und den Begriff so mit Bedeutung zu füllen. Dazu gehört das Wissen um die zentralen bestimmenden Merkmale, die diesen Begriff definieren und es gehört ebenfalls dazu, dass man diesen Begriff mit verschiedenen Beispielen repräsentieren kann, an typischen, untypischen und schliesslich an den Nicht-Beispielen. Geometrische Begriffe aufzubauen ist für die mathematische Entwicklung nicht nur bedeutsam, man kann dies auch sehr handlungsnah und lustvoll gestalten, sodass Begriffsbildung keineswegs eine trockene Angelegenheit ist!

## Literatur

- Aebli, H. (1981). *Denken. Das Ordnen des Tuns (Band 2)*. Stuttgart: Klett-Cotta.
- Amt für Volksschule des Kantons Thurgau. (2016). *Lehrplan Volksschule Thurgau. Mathematik. Kompetenzaufbau 1./2. Zyklus*. Frauenfeld: Amt für Volksschule Thurgau.
- Benz, C., Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Berlin: Springer Spektrum.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 420–464). New York: Macmillan.
- Kaufmann, S. (2010). *Handbuch für die frühe mathematische Bildung*. Braunschweig: Schroedel.
- Meyer, M., & Tiedemann, K. (2017). *Sprache im Fach Mathematik*. Berlin: Springer Spektrum. Springer Spektrum: Berlin.
- Unterhauser, E. (2019). *Geometrisches Begriffsverständnis in der frühen mathematischen Bildung. Erkenntnisse einer Interviewstudie zu den Objektbegriffen Viereck und Dreieck bei Kindergartenkindern*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- van Hiele, P. M. (1984). A child's thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Hrsg.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre van Hiele* (S. 243–253). Brooklyn: Brooklyn College.
- van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 6(2), 310–316.
- Vygotsky, L. S. (1969). *Denken und Sprechen*. Frankfurt a.M.: Fischer.
- Wollring, B., Peter-Koop, A., Habertzettl, N., Becker, N., & Spindeler, B. (2011). *Elementarmathematisches Basisinterview. Grfössen und Messen, Raum und Form*. Offenburg: Mildenerger.