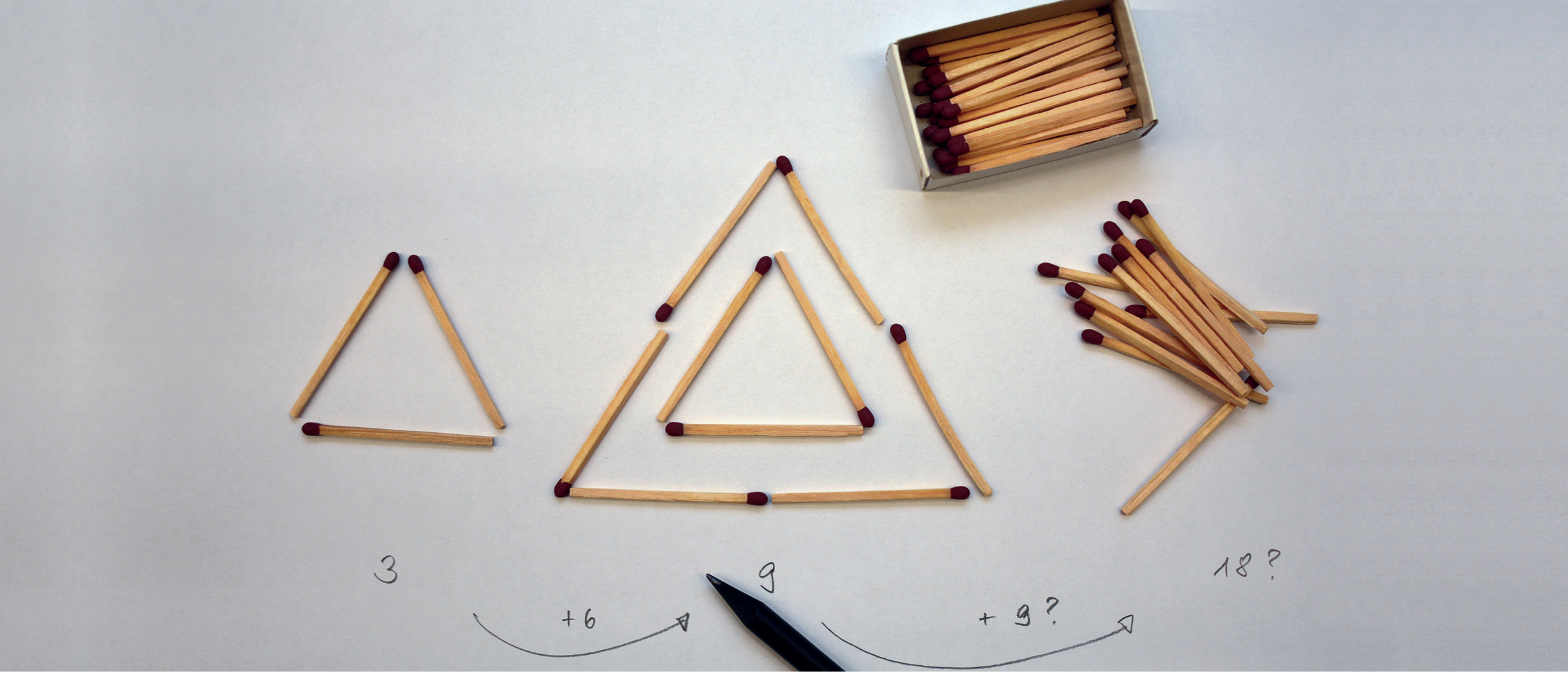


Materialien zur Bildungsforschung | Nr. 11/2020

Lehre
Weiterbildung
Forschung

Mathematisches Begründen in der Primarstufe fördern

Eine Handreichung für die Praxis

Esther Brunner, Romaine Jullier, Jonas Lampart

Pädagogische Hochschule Thurgau.

Impressum

Herausgeberin
Pädagogische Hochschule Thurgau
Unterer Schulweg 3
Postfach
8280 Kreuzlingen 1
Tel. +41 (0)71 678 56 56
info@phtg.ch
phtg.ch

Autorinnen und Autor
Esther Brunner
Romaine Jullier
Jonas Lampart

1 Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Esther Brunner

Mathematisches Begründen und Argumentieren gewinnt im Zusammenhang mit dem neuen Lehrplan und der Kompetenzorientierung an Bedeutung. Erwartet wird, dass die Schülerinnen und Schüler sämtlicher Bildungsstufen Kompetenzen zum mathematischen Argumentieren aufbauen lernen (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016) und die Lehrpersonen deshalb entsprechende Lerngelegenheiten für die Schülerinnen und Schüler schaffen. Damit die Lehrpersonen diese Anforderung umsetzen können, sind zum einen entsprechende Aufgabenstellungen nötig und zum anderen didaktische Konzepte, wie sich mathematisches Argumentieren und Begründen in der Primarschule fördern lässt. Eine erste Sichtung von verschiedenen Mathematiklehrmitteln, die auch im Kanton Thurgau gebräuchlich sind, zeigt, dass der Anteil an Begründungsaufgaben am gesamten Aufgabenangebot sehr klein ist (Brunner, Jullier, & Lampart, 2019). Es braucht deshalb Aufgabensammlungen, die in der Schule eingesetzt werden können. Darüber hinaus sind konkret ausgestaltete und praxisnahe didaktische Konzepte zum mathematischen Argumentieren notwendig, die aufzeigen, wie man mathematisches Begründen in einen etwas grösseren Zusammenhang stellen kann und nicht ausschliesslich mit einzelnen Aufgaben abhandelt.

Im Rahmen des Forschungsprojektes «MaBeLL-INT» (Mathematisches Begründen lehren und lernen: Intervention) der Professur Mathematikdidaktik der PHTG (Brunner, 2018) wurden zum mathematischen Begründen verschiedene Erkenntnisse generiert. Dazu wurden verschiedene Aufgabenstellungen entwickelt, die im Forschungsprojekt zum Einsatz kamen. Der Aufbau dieser Aufgabenstellungen ist prototypisch entlang von vier zentralen Prozessschritten (Kapitel 2.1) zu verstehen. Zudem wurden didaktische Konzepte erarbeitet, die in der Praxis dazu dienen können, anhand von wenigen geeigneten prototypischen Situationen mathematisches Argumentieren im Schulalltag zu realisieren (Kapitel 3). Die Aufgabenstellungen und prototypischen Situationen richten sich in erster Linie an die Arbeit im Zyklus 2 (Klasse 3–6). Die prototypischen Situationen können aber – leicht adaptiert – auch in den Zyklen 1 und 3 eingesetzt werden. Für Zyklus 1 sind sie im Rahmen eines früheren Projektes «IvMAiK» (Intervention Mathematisches Argumentieren im Kindergarten) der Professur Mathematikdidaktik der PHTG auch bereits in der Praxis erprobt worden (Brunner, 2018a).

Die vorliegende Handreichung bündelt die zentralen theoretischen Grundlagen kurz und stellt sie in einen Zusammenhang zum Lehrplan Mathematik der Volksschule Thurgau (Kapitel 2). Ergänzend wird auch eine kleine Aufgabensammlung (Kapitel 4) vorgestellt. Dort werden geeignete Begründungsaufgaben für die drei Kompetenzbereiche in Mathematik ausgeführt. Zudem finden sich in der Handreichung Vorschläge und Beispiele zur Förderung von spezifischem Methodenwissen zum mathematischen Argumentieren und Begründen (Kapitel 5) sowie ein Vorschlag, wie man Begründungen von Schülerinnen und Schülern auswerten, beschreiben und schliesslich auch beurteilen und bewerten kann (Kapitel 6).

Wir hoffen, dass die ausgewählten Aufgabenstellungen und die skizzierten prototypischen Situationen und die Vorschläge für die Umsetzung in der Praxis einen Beitrag leisten, damit Lehrpersonen mathematisches Argumentieren in der Primarschule lustvoll und kompetent umsetzen und den Kindern Lerngelegenheiten ermöglichen, entsprechende Kompetenzen aufbauen zu können.

2 Mathematisches Begründen in der Primarstufe: Theoretische Grundlagen

Esther Brunner & Romaine Jullier

2.1 Mathematisches Begründen: Was ist das?

Mathematisches Begründen und Argumentieren bedeutet, dass man auf eine "Warum-Frage" über einen mathematischen Zusammenhang nach einer passenden mathematischen Antwort suchen und eine solche geben kann. Dazu braucht man zum einen mathematische Kenntnisse und mathematisches Wissen und zum anderen muss man wissen, welcher Art solche mathematischen Gründe sein müssen, welche Struktur sie haben und welche Art der Argumente in der Mathematik gültig sind. Beim mathematischen Begründen und Argumentieren müssen die Argumente, die man entwickelt, aus der Mathematik selbst stammen, das heisst, sie beziehen sich auf mathematische Grundlagen, die nicht bestritten sind. Die Frage beispielsweise, warum die «Quersummenregel 9» gilt, muss mit mathematischen Mitteln und mithilfe einer logischen Argumentation begründet werden. Es ist in der Mathematik nämlich nicht ausreichend, sich beim Argumentieren zum Beispiel auf eine Autorität zu berufen und zu antworten, dass das halt einfach so sei oder dass man das so gelernt habe. Das wären nicht mathematische Gründe, die zudem keine logische Verknüpfung zwischen der Behauptung und den Voraussetzungen herstellen. Eine solch logische Verknüpfung besteht zumindest aus drei Teilen (Abbildung 1). Sie verbindet die unbezweifelten Aussagen (Datum) über eine Begründung (Regel) mit der gezogenen Schlussfolgerung (Konklusion).

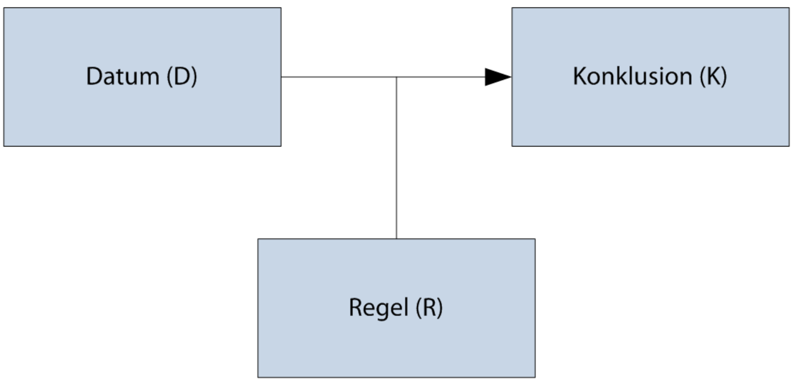


Abbildung 1: Minimale Struktur eines Arguments (Toulmin, 1996)

Mathematische Begründungen haben deshalb sprachlich immer minimal die Struktur von «Es ist so, *weil…*».

Damit solche Begründungen formuliert und entsprechende Argumentationen gegeben werden können, braucht es verschiedene Teilkompetenzen und Prozesse, die eng mit explorativen Tätigkeiten von Suchen, Experimentieren und Ausprobieren verbunden sind sich auf experimentelles Denken (Philipp, 2013) abstützen. Diese experimentellen Prozesse haben zum Ziel, plausible Vermutungen zu finden (Reiss & Ufer, 2009) und zu formulieren, Hypothesen aufzustellen und sie anschliessend zu überprüfen. Eine mathematische Argumentation muss nicht nur in einer zufriedenstellenden Antwort auf die «Warum-Frage» münden, sondern diese muss darüber hinaus auch in der Lerngemeinschaft vorgestellt und dort zur Prüfung vorgelegt werden. Denn beim mathematischen Argumentieren müssen die gegebenen Gründe nicht nur einen selbst, sondern auch andere überzeugen.

Beim mathematischen Begründen sollen Lernende aber auch die Fähigkeit entwickeln, mathematische Aussagen zu hinterfragen sowie Argumente und Begründungen hinsichtlich ihrer Korrektheit, Zulässigkeit und Gültigkeit zu prüfen. Sie sollen mathematische Zusammenhänge erkennen, Vermutungen formulieren sowie Begründungen konstruieren und nachvollziehen können (Walther, van den Heuvel-Panhuizen, Granzer, & Köller, 2008). Lernende sollen unterscheiden, entscheiden und begründen lernen, ob Argumentationen als mathematisch stichhaltig akzeptiert respektive nicht akzeptiert werden. Zentral sind deshalb Prozesse zur Herleitung, Überprüfung, Verifikation oder Falsifikation mathematischer Behauptungen (Jahnke & Ufer, 2015).

Als Ausgangslage für eine Begründung oder eine Argumentation gilt immer eine Behauptung oder ein Sachverhalt, der bezweifelt werden kann, das heisst, es fehlt die Gewissheit, ob etwas stimmt oder nicht oder ob etwas immer gilt oder nur gerade in diesem einen Fall. Diese Ausgangslage setzt den Prozess des Begründens in Gang. Der Begründungsprozess selbst kann in mindestens vier Teilschritte zerlegt werden (Brunner, 2019):

1) Man muss eine mathematische Struktur mit ihren wesentlichen sie bestimmenden Elementen **erkennen** können.

2) Man muss diese Struktur mit ihren entscheidenden Merkmalen **beschreiben** oder irgendwie (z.B. in Form einer Skizze) **repräsentieren** lernen.
3) Man muss erklären können, *warum* diese Struktur auftritt und **begründen** können, wieso sie gilt.
4) Und schliesslich muss man in der Lage sein zu **verallgemeinern**, also zu begründen, warum etwas *notwendigerweise immer* so sein *muss*.

Auf dieser Basis können dann Vorhersagen getroffen werden (Brunner, 2019).
Diese vier Schritte gehören zu einem vollständigen Begründungsprozess. Jüngere Schülerinnen und Schüler sind oft noch nicht in der Lage, auch den vierten, sehr anspruchsvollen Schritt – das Verallgemeinern – korrekt auszuführen.

2.2 Mathematisches Begründen: Warum soll man das tun?

Der Aufbau mathematischer Argumentations- und Begründungskompetenz ist in den neuen Lehrplänen (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016) als wichtiger Bestandteil der mathematischen Bildung der obligatorischen Schulzeit verankert. Dies hängt zum einen damit zusammen, dass sich die Mathematik als Wissenschaft selbst als eine «beweisende Wissenschaft» versteht (Heintz, 2000), das heisst, nicht ein Experiment ist entscheidend für das Aufnehmen von neuem Wissen, sondern die Qualität einer Begründung und Beweisführung. Mathematisches Begründen betrifft deshalb immer den Kern der Mathematik und gilt als eigentliches «Herzstück» der Mathematik (Rav, 1999, S. 6), weil dadurch neue Ideen, Methoden und neues Wissen entwickelt werden.
Und zum anderen ist mathematisches Begründen aus lerntheoretischen Gründen sehr wichtig: Wenn Lernende mathematische Inhalte begründen, Strukturen erkennen sowie Beziehungen zwischen Inhalten herstellen, entwickeln sie in der Regel ein tieferes Verständnis für Sachverhalte. Was begründet verstanden worden ist, bleibt länger im Gedächtnis haften und kann flexibler angewendet werden.
Mathematisches Begründen braucht zudem die Anwendung von mathematischem Wissen und Können sowie die Darstellung von Gedankengängen und Lösungen und stellt eine besondere Art des Problemlösens dar (Polya, 1995; Reusser, 1984). Deshalb ist mathematisches Argumentieren auch mit verschiedenen anderen Handlungskompetenzen – wie dem Operieren und Benennen, dem Erforschen und dem

Mathematisieren und Darstellen – aus dem Kompetenzmodell des Lehrplans (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016) verknüpft.

2.3 Mathematisches Begründen: Was sagt der Lehrplan dazu?

Was sollen Schülerinnen und Schüler beim mathematischen Argumentieren und Begründen denn genau lernen? Ein Blick in den Lehrplan (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016) zeigt, dass es um Fähigkeiten zum Erkennen von Zusammenhängen und Regelmässigkeiten, zum Transfer, zur Umkehrung der Gedankengänge, zur Abstraktion sowie zum folgerichtigen Denken geht. Um diesem Ziel gerecht zu werden, muss im Unterricht ein auf Verstehen ausgerichtetes Lehren und Lernen stattfinden, das eigene Einsichten ermöglicht und die Denk-, Urteils- und Kritikfähigkeit in der Auseinandersetzung mit mathematischen Problemen stärkt. Beim mathematischen Begründen und Argumentieren sollen beispielhafte oder allgemeine Einsichten, Zusammenhänge oder Beziehungen erklärt, begründet oder beurteilt werden. Laut Lehrplan 21 (D-EDK, 2016, S. 8) sind die folgenden Tätigkeiten zentral:

- Ergebnisse überprüfen, hinterfragen, interpretieren und begründen;
- Antworten auf Fragen wie *Wie verändert sich …? Ist das immer so …?* finden und Begründungen äussern;
- Muster operativ verändern, weiterführen und begründen;
- Entdeckungen/Einsichten mit Beispielen, enaktiv, ikonisch, sprachlich-symbolisch oder formal-symbolisch darstellen und begründen;
- Erläuterungen und Begründungen entwickeln und Beweise führen.

Der Lehrplan listet verbindliche Kompetenzbeschreibungen auf, die für alle Schülerinnen und Schüler massgeblich sind. So ist für den Kompetenzbereich «Zahl & Variable» vorgesehen, dass

- die Schülerinnen und Schüler Zahl- und Operationsbeziehungen sowie arithmetische Muster erforschen und Erkenntnisse austauschen können (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016, S. 15);
- sie Aussagen, Vermutungen und Ergebnisse zu Zahlen und Variablen erläutern, überprüfen, begründen können (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016, S. 16);

> die Schülerinnen und Schüler beim Erforschen arithmetischer Muster Hilfsmittel nutzen können (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016, S. 17).

Für den Kompetenzbereich «Form & Raum» wird erwartet, dass

> die Schülerinnen und Schüler geometrische Beziehungen, insbesondere zwischen Längen, Flächen und Volumen, erforschen, Vermutungen formulieren und Erkenntnisse austauschen (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016, S. 24);

> sie Aussagen und Formeln zu geometrischen Beziehungen überprüfen, mit Beispielen belegen und begründen können (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016, S. 25).

Im Kompetenzbereich «Grössen, Funktionen, Daten & Zufall» sollen

> die Schülerinnen und Schüler zu Grössenbeziehungen und funktionalen Zusammenhängen Fragen formulieren, diese erforschen sowie Ergebnisse überprüfen und begründen (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016, S. 34);

> sie Sachsituationen zur Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit erforschen, Vermutungen formulieren und überprüfen können (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016, S. 35).

Zu diesen übergreifenden Kompetenzbeschreibungen, die für sämtliche Schulstufen verbindlich sind, legt der Lehrplan sodann den Auftrag für die drei einzelnen Zyklen fest und formuliert für drei unterschiedliche Zeitpunkte (Ende Kindergarten, Ende vierte Klasse, Mitte achte Klasse) entsprechende Grundanforderungen, die von (fast) allen Lernenden erreicht werden sollen.

2.4 Mathematisches Begründen: Voraussetzungen für den Aufbau von Begründungskompetenz

Beim mathematischen Argumentieren und Begründen ist es hilfreich, wenn bereichsspezifisches Methodenwissen verfügbar ist (Ufer, Heinze, Kuntze, & Rudolph-Albert, 2009). Unter solch bereichsspezifischem Methodenwissen zum mathematischen Argumentieren und Begründen fasst man Metawissen, das heisst ein Wissen *über* Argumentieren und Begründen, zusammen. Das fürs mathematische Argumentieren und Begründen notwendige Methodenwissen kann mit mindestens drei

Aspekten beschrieben werden (Heinze & Reiss, 2003): 1) Wissen zum Argumentationsschema, das heisst Wissen zur Form eines Arguments, 2) Wissen zur Struktur eines Arguments (Kapitel 2.1, Abbildung 1) und 3) Wissen zur Anordnung der Argumente als Argumentationskette (Brunner, 2018c). Zum Wissen zum Argumentationsschema gehört auch, dass die Schülerinnen und Schüler unterscheiden können zwischen Argumenten aus dem Alltag und mathematischen Argumenten und dass sie Argumente entsprechend selbst entwickeln und prüfen können. Diese drei Facetten von bereichsspezifischem Methodenwissen haben sich als sehr bedeutsam für das Begründenlernen erwiesen (Ufer et al., 2009). Wir werden deshalb auch zur Förderung von bereichsspezifischen Methodenkompetenzen einen Unterrichtsvorschlag vorstellen (Kapitel 5).

3 Vier prototypische Situationen für den Unterricht

Esther Brunner

Nachfolgend werden vier prototypische Situationen beschrieben, mit denen im Unterricht mathematisches Argumentieren gefördert werden kann. Diese Situationen beschreiben – unabhängig von der Aufgabenstellung oder vom mathematischen Inhalt, um den es geht – Anlässe, die aus dem Alltag vertraut sind und die ganz bestimmten Regeln folgen. Diese vier Situationen liegen für die Kindergartenstufe ausführlich beschrieben und anhand von Bilderbüchern für den Einsatz in Zyklus 1 konkretisiert vor (Brunner, 2016, 2018a). Sie wurden zudem im Rahmen des Forschungsprojekts «IvMAiK» (Intervention Mathematisches Argumentieren im Kindergarten) der Professur Mathematikdidaktik der PHTG in der Kindergartenpraxis erprobt (Brunner, 2019). Für die Arbeit in der Primarschule werden die vier prototypischen Situationen hier adaptiert beschrieben.

3.1 Vier Teilaufgaben entlang der vier Prozessschritte

Eine erste Vorgehensweise nimmt die vier Prozessschritte des mathematischen Argumentierens und Begründens (Kapitel 2.1) auf und setzt diese der Reihe nach um:

1) Die Kinder müssen eine bestimmte mathematische Struktur mit den diese konstituierenden Merkmalen erkennen können. Diese Kompetenz wird unter anderem an der Möglichkeit der Weiterführung der vorhandenen Struktur erkennbar.

2) Sie müssen die erkannte Struktur beschreiben und somit die relevanten Merkmale herausarbeiten können (*Repräsentation der relevanten Struktur*).

3) Sie müssen Gründe finden und formulieren können, warum die Struktur entoder besteht (*Konstruktion einer Begründung*).

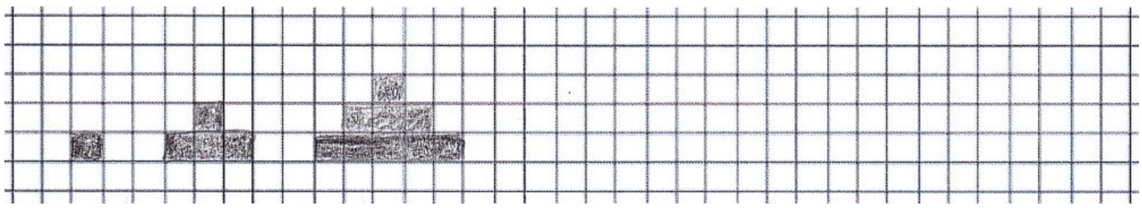
4) Schliesslich müssen sie im Einzelfall das Allgemeine erkennen und damit Einsicht darüber erlangen, warum etwas *immer* und *notwendigerweise* gilt beziehungsweise gelten *muss* und davon ausgehend eine gültige Verallgemeinerung entwickeln können. Auf dieser Grundlage können sodann auch

Vorhersagen für weitere Fälle getroffen und validiert beziehungsweise falsifiziert werden. In diesem Schritt enthalten sind Verfahren zur Evaluation und Prüfung der vorgebrachten Begründung bezüglich ihrer Gültigkeit (*Verallgemeinerung, Rekonstruktion und Reproduktion der mathematischen Begründung auf allgemeine Weise*).

Entlang dieser vier Schritte werden Teilaufgaben zu einem mathematischen Muster formuliert. In Teilaufgabe 1 geht es jeweils um das Erkennen einer Struktur (1), in Teilaufgabe 2 um deren Beschreibung beziehungsweise Repräsentation (2). Teilaufgabe 3 betrifft Gründe, warum die Struktur ent- oder besteht (3) und Teilaufgabe 4 bezieht sich auf die Verallgemeinerung (4). Dies kann beispielhaft wie folgt aussehen:

Im ersten Schritt, in der eine Struktur oder ein Zusammenhang erkannt werden soll, wird die Aufgabe so gestaltet, dass sie ein Problem vorstellt, bei dem erkannt werden soll, was genau fehlt oder was das Besondere und Zentrale ist. Oder es wird ein Muster beschrieben, das fortgesetzt werden soll:

1. Das sind die ersten drei Figuren einer Folge. Zeichne weiter!



Der zweite Prozessschritt schliesst hier an und fordert dazu auf, die zentralen Merkmale zu *repräsentieren,* zum Beispiel zu *beschreiben* oder zu zeichnen oder handelnd darzustellen.

2. Schreibe oder zeichne eine Anleitung, wie man das Muster weiterführen kann!

Im dritten Schritt wird nach einer *Begründung* eines Zusammenhangs gefragt. Dazu braucht es evtl. ergänzende Informationen oder Hinweise, die auf diesen Zusammenhang hinweisen:

3. Schreibe zu den einzelnen Figuren, wie viele Kästchen du brauchst, um sie zu zeichnen.
Wie viele Kästchen braucht man für die 7. Figur? Erkläre, warum es genau so viele sind?

Der vierte Prozessschritt zielt dann auf die Verallgemeinerung ab und verlangt eine Formulierung für den allgemeinen Fall, das heisst für etwas, das «immer» so ist bzw. «sein muss»:

4. Wie muss deine Erklärung heissen, dass sie **immer** (für irgendein Beispiel, also auch für die 50., 100. oder 1000. Figur) funktioniert?

Die vier Prozessschritte – erkennen, beschreiben/repräsentieren, erklären, verallgemeinern – können im Wesentlichen mit den folgenden vier Aufträgen bei beliebigen mathematischen Strukturen angeregt und herausgefordert werden:

1) Was siehst du? Beschreibe!
2) Wie geht es weiter? Beschreibe! Schreibe deine Vermutung auf.
3) Warum meinst du, dass es so weitergeht?
   Überprüfe deine Vermutung und zeige, ob sie stimmt.
4) Ist das immer so? Warum oder warum nicht?

3.2 Mathematisches Streiten

Eine sehr reichhaltige Situation zum Begründen und Argumentieren ist auch das mathematische Streiten. Für einen Streit braucht es einen Gesprächsgegenstand, der strittig ist oder strittig gemacht werden kann, etwas, worüber Unsicherheit herrscht, ob es so oder doch anders ist (Van Eemeren & Grootendorst, 2004). Im Gespräch müssen nun Begründungen formuliert und vom Gegenüber überprüft werden. Stimmt das? Ist das so oder eben doch nicht? Argumente werden ausgetauscht und gegenseitig geprüft, immer mit der Frage, was nun stimmt und was nicht oder wer recht hat. Dieser Streit kann dadurch entschieden werden, dass die Gültigkeit der Argumente geprüft wird. Ein gültiges Argument muss logisch-schlüssig sein und muss

aus der Mathematik selbst stammen. Es verbindet die Voraussetzung(en) mit der Behauptung über eine Begründung (siehe Kapitel 2.1, Abbildung 1).
Solche mathematischen Streitsituationen können bewusst und zu ganz unterschiedlichen Inhalten konstruiert werden, indem beispielsweise für eine Aufgabe zwei unterschiedliche Lösungen gegeben werden und danach gefragt wird, welche stimmt und warum dies so ist.

Eine weitere Umsetzung ist die Beschreibung von zwei unterschiedlichen Aussagen, bei denen entschieden werden muss, welche zutrifft und welche nicht und weshalb dies so ist bzw. wie sich das begründen lässt:

> Leandra sagt: «Jede gerade Zahl kann als Summe von zwei ungeraden Zahlen dargestellt werden.»
> «Nein! Das stimmt nicht!» sagt Tobias. «Das geht auch mit drei oder vier ungeraden Zahlen!»
>
> Wer hat recht? Und warum?

Dieses Vorgehen lässt sich beliebig in verschiedensten mathematischen Inhaltsgebieten einsetzen und ist beispielsweise auch geeignet, um Definitionen auszuschärfen und zu vervollständigen:

> Valerie sagt: «Ein Quadrat hat immer 4 gleich lange Seiten.»
> «Das ist aber auch bei einer Raute so. Dann kann das nicht stimmen!» meint Lino.
>
> Wer hat recht? Und warum?

Wichtig bei diesem Vorgehen ist, dass solche Streitgespräche grundsätzlich in eine Gesprächssituation eingebettet sind, sei es mündlich oder schriftlich. Die unterschiedlichen Argumente, die hervorgebracht werden, müssen dann vom (fiktiven) Gegenüber geprüft werden. Es muss beurteilt werden, inwiefern sie gültig sind.

Gerade diese Entscheidung, ob ein Argument gültig ist oder nicht, braucht viel fachliches Wissen, sowohl von den Schülerinnen und Schülern wie der Lehrperson. Ist dieses mathematische Wissen bei den Kindern noch nicht vorhanden, übernimmt die Lehrperson und stellt ein gültiges und vollständiges Argument vor, lässt es die Kinder beurteilen und kontrastiert mit einem Argument, das ungültig ist, das ebenfalls von den Kindern eingeschätzt werden kann. Besonders fruchtbar sind Gespräche über die Gültigkeit von Argumenten, die zwar gültig sind für bestimmte Beispiele, nicht aber immer oder für solche, die nicht vollständig sind.

3.3 Fehler suchen

Auch Fehler in vorhandenen Strukturen zu erkennen, zu beschreiben und zu begründen, ist eine didaktische Möglichkeit, mathematisches Begründen und Argumentieren zu fördern. Bei mathematischen Fehlern geht es um eine Verletzung einer mathematischen Struktur, eines Zusammenhangs oder einer Gesetzmässigkeit. Jemand schreibt: «1, 4, 9, 16, 23…» und alle wissen, dass hier eine mathematische Konvention verletzt wird, indem nach der 16 (4^2) die 25 (5^2) kommen müsste als eine Folge von Quadratzahlen. Oder jemand sagt, dass 500 das Doppelte von 200 sei, was nachweisbar nicht zutrifft. Verletzt wird mit solchen Aussagen eine mathematische Gesetzmässigkeit. Solche mathematischen Fehler können als Ausgangslage zum Argumentieren dienen. Dazu braucht es vier Teilaufgaben, die sich – leicht modifiziert – ebenfalls an den vier Prozessschritten mathematischen Argumentierens und Begründens orientieren (vgl. Brunner, 2018a, S. 33):

1) Der Fehler beziehungsweise das Abweichen von der mathematischen Regel, Gesetzmässigkeit oder Konvention muss gesucht und gefunden werden. Dazu muss die Struktur zunächst identifiziert werden können.
2) In einem weiteren Schritt muss begründet werden, warum es sich bei der gefundenen Abweichung um eine Abweichung von einer Regel handelt.
3) Nun muss die fehlerhafte Struktur korrigiert werden, indem die erkannte Ordnung wiederhergestellt wird.
4) Abschliessend kann begründet werden, warum die Struktur nun wieder korrekt ist.

Findest du den Fehler?

14, 27, 40, 53, 66, 97, ...

Korrigiere und begründe, warum dies falsch ist.
Bist du sicher, dass es nun stimmt? Warum?

3.4 Behaupten und Widerlegen oder Bestätigen[1]

Ebenfalls eine fruchtbare und überdies lustvolle Anlage ist das Schwindeln, Schummeln und Lügen oder das Behaupten von irgendwelchen (mathematischen) Dingen. Dazu muss man sich zunächst einmal überlegen, was man genau unter einer Lüge versteht und was genau als wahr gilt. Es stellt sich auch die Frage, was das Gegenteil von «wahr» ist. «Falsch» oder «halb wahr» oder etwas, das geschwindelt ist? Die Mathematik löst diese Frage, indem sie zwischen «wahrer Aussage» und «falscher Aussage» unterscheidet[2]. «Wahr» ist eine Aussage in der Mathematik nur dann, wenn sie vollständig zutrifft. Eine «falsche Aussage» ist jede Aussage, die nicht zutrifft. Es gibt in der Mathematik deshalb keine halben Wahrheiten oder so etwas wie zulässige bzw. akzeptierte Notlügen. Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch. Der Satz «Ein Dreieck hat drei Ecken» ist eine wahre Aussage, weil sie zutrifft und ein Dreieck zwingend drei Ecken hat. Der Satz «9 ist eine Primzahl» hingegen ist eine falsche Aussage, weil man 9 durch 3 teilen kann, eine Primzahl aber nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist.
Wichtig zu wissen ist, dass eine «Aussage» nicht zwingend sprachlich formuliert sein muss. Auch eine korrekte Gleichung – z. B. $3 + 3 = 6$ – ist eine wahre Aussage. Eine falsch gelöste Gleichung hingegen – z. B. $24 + 28 = 51$ – ist eine falsche Aussage. Enthält die Gleichung eine Variable – z. B. $2x + 17 = 21$ –, kann man nicht bestimmen, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Das kann man erst entscheiden, wenn man die

[1] Dieser Teil ist weitgehend aus Brunner (2018a, S. 42 ff.) entnommen und entsprechend adaptiert.
[2] Auf Spezialfälle wird hier nicht weiter eingegangen.

Gleichung aufgelöst und für die Variable eine Zahl eingesetzt hat: $2x + 17 = 21$ wird eine wahre Aussage, wenn man $x = 2$ einsetzt.

Aussagen sind in der Mathematik Sätze, die keinen Interpretationsspielraum zulassen. Ein Satz wie «Das ist gross» ist in der Mathematik (und in der Logik) keine Aussage, weil man nicht bestimmen kann, ob der Satz wahr oder falsch ist. Dafür fehlt eine Referenzangabe. Würde der Satz hingegen «1 m ist länger als 50 cm» heissen, handelt es sich um eine wahre Aussage, weil dieser Aussage ein eindeutiger Wahrheitswert (wahr – falsch) zugeordnet werden kann.

In der Mathematik gibt es einfache und zusammengesetzte Aussagen. Eine einfache Aussage umfasst einen einzigen Sachverhalt: «2 + 2 = 4». Eine zusammengesetzte Aussage bringt mehrere Sachverhalte zusammen, zum Beispiel durch eine Präzisierung: «2 + 2 = 4 und damit die Hälfte von 8.»

Wenn eine Aussage bei jeder Interpretation, das heisst immer, wahr ist, ist sie allgemeingültig.

Einen Sonderfall von Aussagen stellt die Verneinung dar. Die sprachlich negativ formulierte Form kann dennoch eine wahre Aussage sein: «Das ist kein Dreieck» ist dann eine wahre Aussage, wenn beispielsweise ein Kreis gezeigt wird. Eine falsche Aussage wäre es, wenn auf ein Dreieck gezeigt würde.

Aussagen können auch miteinander verknüpft werden. Dabei sind folgende fünf verschiedene Verknüpfungsarten bedeutsam:

1) UND-Verknüpfung: «6 ist eine gerade Zahl UND 6 ist kleiner als 7.» (Beide Teilaussagen sind zugleich wahr.)
2) ODER-Verknüpfung: «6 ist eine gerade Zahl ODER kleiner als 10.» (Mindestens eine Teilaussage ist wahr.)
3) ENTWEDER-ODER-Verknüpfung: «Entweder ist 15 durch 3 ODER durch 4 teilbar.» (Eine Teilaussage ist wahr und die andere ist zugleich falsch.)
4) WENN-DANN-Verknüpfung: «Wenn 81 durch 9 teilbar ist, dann ist 81 durch 3 teilbar.» (Wenn dann falsch, wenn A [Voraussetzung] wahr und B gleichzeitig falsch. Sonst, wenn A, dann B wahr)
5) GENAU WENN-DANN-Verknüpfung: «81 ist teilbar durch 9 genau dann, wenn die Quersumme von 81 durch 9 teilbar ist. » (Genau dann wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben.)

Verknüpfungen von Aussagen führen ihrerseits zu neuen wahren oder falschen Aussagen.

Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt hin zu überprüfen, ist anspruchsvoll und setzt entsprechendes mathematisches Vorwissen voraus. Wenn eine Aussage bezüglich ihres Wahrheitsgehaltes überprüft wird, gibt es zwei mögliche Antworten: Entweder ist die Aussage falsch und wird deshalb zurückgewiesen oder sie ist wahr und wird bestätigt. Wahre beziehungsweise falsche Aussagen zu identifizieren, bedeutet, eine begründete Beurteilung und Einschätzung bezüglich des Inhalts zu treffen und zwar in Verbindung mit fachlichem Vorwissen.

Ein kognitiv anspruchsvollerer Schritt ist für die Beurteilung des Wahrheitsgehaltes von Negationen, das heisst von Verneinungen, notwendig. Bei solchen Aussagen muss der Wahrheitsgehalt in Beziehung gesetzt werden zur vorhandenen Form, also der Negation. «Das ist KEIN rechter Winkel» ist nicht nur etwas völlig anderes als «Das ist ein rechter Winkel», sondern lässt zudem einen grösseren Möglichkeitsraum zu: Was ist es denn, wenn es KEIN rechter Winkel ist? Solche Negationen sind für die Mathematik aber sehr wichtig, weil sie den Möglichkeits- und Wertebereich präzisieren und die Voraussetzungen klären.

Aussagen miteinander zu neuen Aussagen zu verknüpfen, ist je nach Verknüpfungsart unterschiedlich anspruchsvoll. Am einfachsten ist die UND-Verknüpfung, weil dabei beide Teilaussagen wahr sein müssen, damit die neue verknüpfte Aussage wahr wird. ODER-Verknüpfungen hingegen können eine Entscheidung verlangen, aber nicht zwingenderweise, wie dies für die ENTWEDER-ODER-Verknüpfungen gilt. Die WENN-DANN-Verknüpfungen zeigen einen zeitlichen Verlauf von Voraussetzung und Folge beziehungsweise Konsequenz an und sind ebenfalls anspruchsvoll, weil sorgfältig überlegt werden muss, was die Voraussetzung ist und welches die Konsequenz. Die GENAU-WENN-DANN-Verknüpfungen präzisieren diese Voraussetzung-Folge-Struktur in zwingender Weise. Etwas gilt NUR GENAU-WENN-DANN.

Wahre und falsche Aussagen zu konstruieren, eignet sich insbesondere im Zusammenhang mit Definitionen sehr gut. Die Schülerinnen und Schüler werden beispielsweise aufgefordert, bestimmte Formen oder Körper in der Umgebung zu suchen und zu beschreiben und zu benennen: «Das ist ein Prisma.» Zeigt das Kind dabei tatsächlich auf ein Prisma, ist die Aussage wahr. Nun kann begründet werden, warum dies ein Prisma und nicht etwa ein Zylinder ist, und dabei muss auf mathematische Eigenschaften und Beziehungen zurückgegriffen werden, durch welche ein Prisma definiert ist, zum Beispiel: «Das ist ein Prisma, WEIL seine Grundfläche ein Fünfeck ist.» Das ist zwar eine wahre Aussage und richtige Begründung, die das Prisma gegenüber dem Zylinder abgrenzt, aber sie ist nicht hinreichend. Ein Prisma ist ja nicht allein durch seine Grundfläche (Vieleck) definiert, sondern dadurch, dass dieses ebene Vieleck entlang einer nicht in dieser Ebene liegenden Gerade im Raum parallel verschoben – d. h. gewissermassen aus der Ebene in den Raum gezogen – wird: «Ein Körper heisst gerades n-seitiges Prisma (kurz: Prisma), wenn er begrenzt wird von zwei zueinander kongruenten und zueinander parallelen n-Eckflächen und n-Rechteckflächen.» (Rolles, 2001, S. 275).

Ausgehend von solchen Formen und Körpern können wahre und falsche Aussagen vorgestellt, bezüglich ihres Wahrheitsgehalts geprüft und eingeschätzt werden, wobei die Einschätzung mathematisch begründet werden muss. Gearbeitet wird damit an der im Lehrplan 21 formulierten Kompetenz MA.2.B: «Die Schülerinnen und Schüler können Aussagen und Formeln zu geometrischen Beziehungen überprüfen, mit Beispielen belegen und begründen.» (D-EDK, 2014, S. 23).

Weniger geeignet für solche Lernanlässe, um den Wahrheitsgehalt von Aussagen zu prüfen und die Antwort begründen zu lernen, sind mathematische Strategien oder Konventionen. Ob man die halbschriftliche Strategie des Ergänzens oder diejenige von Stellenwerten extra bei der Subtraktion verwendet, ist eine Vorgehensweise, kein mathematisches Gesetz. Solche Vorgehensweisen lassen sich bezüglich Passung zur Aufgabenstellung und Zweckmässigkeit ihres Einsatzes begründen, aber nicht ob die eine oder andere wahr beziehungsweise falsch ist. Wahr oder falsch können lediglich die beim Verfahren getätigten Aussagen sein.

4 Aufgabensammlung

Romaine Jullier

Mathematisches Argumentieren erfolgt gemäss Lehrplan (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016) in allen drei Inhalts- beziehungsweise Kompetenzbereichen und ist eng mit dem Handlungsaspekt des Erforschens verknüpft. Erforschen im Sinne von systematischem Untersuchen, Erkunden und Ausprobieren ist zentral, damit eine entsprechende Handlungs- und Wissensbasis vorliegt, auf der argumentiert werden kann. Deshalb sollte den nachfolgenden Aufgabenstellungen immer auch eine Phase des Erkundens und experimentellen Denkens (Philipp, 2013) vorausgehen.

Die nachfolgenden zusammengetragenen Aufgabenstellungen haben exemplarischen Charakter und werden nach Inhalts- beziehungsweise Kompetenzbereich des Kompetenzmodells Mathematik (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016) aufgeführt.

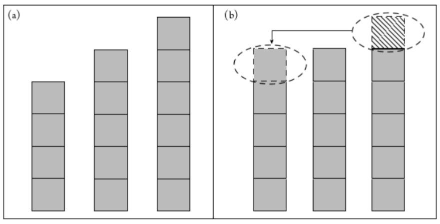
4.1 Aufgaben zum Kompetenzbereich «Zahl & Variable»

Die Aufgabenbeispiele stammen vorwiegend aus dem Kompetenzbereich «Zahl & Variable», weisen aber oft auch eine Verbindung mit dem Kompetenzbereich «Form & Raum» auf. Solche Verbindungen von Kompetenzbereichen sind für das Lernen von Mathematik besonders wichtig. Die Aufgaben selbst haben innermathematischen Charakter, das heisst, sie beziehen sich auf die Mathematik selbst und nicht auf aussermathematische Themen.

Aufgaben zu Teilbarkeit und Vielfachen	Quelle
Teilbarkeit der Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen *Grundgedanke: Begründungsaufgabe mit unendlich vielen Fällen* → *Generalisierungen treffen, Muster erkennen, Schlüsselwörter (nie, manchmal, immer), Gegenbeispiele* a) Werden drei aufeinanderfolgende Zahlen addiert, entsteht ein Vielfaches von 4. z.B. 3 + 4 + 5. Ist das immer so? Stimmt diese Behauptung immer? Falls nicht, korrigiere den Satz. (Die Behauptung stimmt nur manchmal, bei Spezialfällen.) b) Rechne verschiedene Summen von drei aufeinanderfolgenden Zahlen aus und stelle eine Vermutung auf, indem du folgenden Satz vervollständigst. Wenn ich	In Anlehnung an Stylianides (2016, S. 123)

drei aufeinanderfolgende Zahlen addiere, ist die Antwort immer ein Vielfaches von …

c) Überprüfe deine Vermutung. Warum meinst du, dass sie stimmt? Ist das immer so? Warum oder warum nicht? Versuche mit Worten oder einer Zeichnung zu zeigen warum oder warum nicht.



Mögliche Weiterführungen
(analog bearbeiten wie Aufgabe zur Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen):

- Wenn du eine gerade und eine ungerade Zahl zusammenzählst, erhältst du eine ungerade Zahl. Ist das immer so? Zeige auf und begründe! Zeige an Beispielen, verbal, zeichnerisch und rechnerisch! (Brunner, 2014)
- Eine ungerade Zahl plus eine ungerade Zahl ergibt immer eine gerade Zahl. Stimmt die Aussage? Überprüfe! Beschreibe und zeige, was passiert! (Hinweis: Wie kannst du eine ungerade Zahl darstellen? Wie kannst du die Addition von zwei ungeraden Zahlen darstellen?)

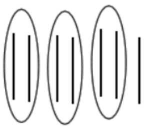
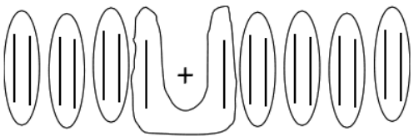


Figure 7.3 An illustration that number 7 is an odd number.



- Warum ist die Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen durch acht teilbar?
- Überprüfe folgende Aussage und begründe oder widerlege sie: Die Summe von vier aufeinanderfolgenden Zahlen ist stets durch 2 teilbar! Zeige an Beispielen, zeichnerisch und rechnerisch! (Mathematik 5, S. 97; Diener et al., 2015a, S. 97).
- Überprüfe folgende Aussage und begründe oder widerlege sie: Wenn zwei Zahlen je durch 2 teilbar sind, so ist die Summe durch 4 teilbar! Zeige an Beispielen, zeichnerisch und rechnerisch! (Mathematik 5, S. 97; Diener et al., 2015a, S. 97).

Summen von zwei Vielfachen von 3 *Grundgedanke: Widerlegen oder Rechtfertigung einer Aussage, von einem Fall zu endlich vielen Fällen, zu unendlich vielen Fällen (Allgemeingültigkeit)*	In Anlehnung an Stylianides (2016, S. 29)

Variante 1: Rechtfertigung

a) Was haben folgende Summanden und Summen gemeinsam? Beschreibe!

3 + 6 = 9

3 + 9 = 12

6 + 12 = 18

6 + 15 = 21

b) Bilde die Summen von weiteren zwei Vielfachen von 3. Was fällt dir auf? Stelle eine Vermutung auf.
c) Überprüfe deine Vermutung an weiteren Beispielen und zeige, ob sie stimmt.
d) Trifft deine Vermutung immer zu? Warum ist das so? Warum nicht?

Variante 2: Widerlegung

Behauptung: Werden zwei Vielfache von 3 addiert, ist die Summe immer durch 6 teilbar.

a) Überprüfe die Aussage an folgendem Beispiel: 33 + 36 und beschreibe, was dir auffällt.
b) Überprüfe die Aussage an weiteren Beispielen. Stelle eine eigene Vermutung auf.
c) Warum meinst du, dass deine Vermutung stimmt? Überprüfe sie an weiteren Beispielen.
d) Trifft deine Vermutung immer zu? Warum ist das so? Warum nicht?

Mögliche Weiterführungen (analog bearbeiten):

- Werden drei Vielfache von 3 addiert, ist die Summe immer durch 3 teilbar.
- Werden zwei Vielfache von 4 (5, 6, …) addiert, ist die Summe durch 4 (5, 6, …) teilbar.
- Wenn du eine gerade und eine ungerade Zahl zusammenzählst, erhältst du eine ungerade Zahl. Ist das immer so? Zeige auf und begründe! Zeige an Beispielen, verbal, zeichnerisch und rechnerisch!
- Eine ungerade Zahl plus eine ungerade Zahl ergibt immer eine gerade Zahl. Stimmt die Aussage? Überprüfe! Beschreibe und zeige, was passiert! (Hinweis: Wie kannst du eine ungerade Zahl darstellen? Wie kannst du die Addition von zwei ungeraden Zahlen darstellen?) (Grundgedanke: Begründungsaufgaben mit unendlich vielen Fällen, Generalisierungen treffen, Muster erkennen, Schlüsselwörter *nie, immer*, Gegenbeispiele) (Stylianides, 2016, S. 137).

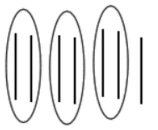
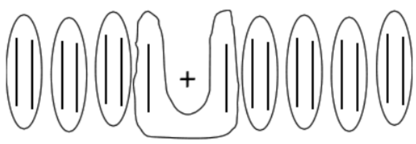


Figure 7.3 An illustration that number 7 is an odd number.

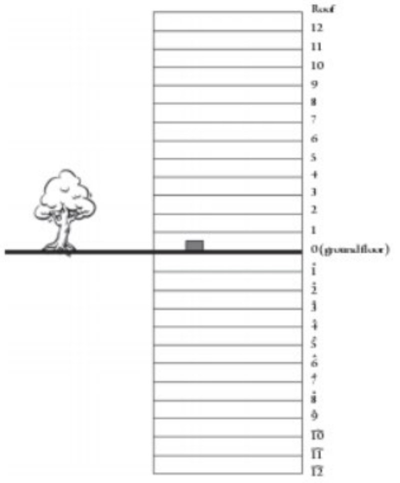


- Warum ist die Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen durch acht teilbar?

– Überprüfe folgende Aussage und begründe oder widerlege sie: Die Summe von vier aufeinanderfolgenden Zahlen ist stets durch 2 teilbar! Zeige an Beispielen, zeichnerisch und rechnerisch! (Mathematik 5, S. 97; Diener et al., 2015a, S. 97). – Überprüfe folgende Aussage und begründe oder widerlege sie: Wenn zwei Zahlen je durch 2 teilbar sind, so ist die Summe durch 4 teilbar! Zeige an Beispielen, zeichnerisch und rechnerisch! (Mathematik 5, S. 97; Diener et al., 2015a, S. 97).	

Aufgaben zu Grundoperationen	
Differenzen von dreistelligen Zahlen und ihren Umkehrzahlen untersuchen und begründen a) Gegeben ist eine dreistellige Zahl aus drei verschiedenen Ziffern, nämlich 345. Indem die Ziffernreihenfolge umgedreht wird, entsteht die Umkehrzahl 543. Nun subtrahiere (abziehen) die kleinere Zahl von der grösseren Zahl. b) Wähle eine weitere dreistellige Zahl aus drei verschiedenen Ziffern aus. Erzeuge ihre Umkehrzahl, indem du die Ziffernreihenfolge umdrehst. Dann ziehe die kleinere von der grösseren Zahl ab. Wiederhole das Vorgehen mehrmals. Was fällt dir auf? Beschreibe. c) Welche Ergebnisse kommen heraus, wenn man dies mit verschiedenen Ausgangszahlen macht? Formuliere eine Vermutung. d) Warum meinst du, dass deine Vermutung zutrifft? Überprüfe sie und zeige, ob sie stimmt. Tipp: Legeplättchen in der Stellenwerttafel. e) Trifft deine Vermutung immer zu? Warum? Warum nicht? **Mögliche Weiterführungen** a) Ausgehend von einer dreistelligen Zahl, deren Ziffern nicht gleich sind, soll die Differenz mit der Umkehrzahl gebildet und dazu die Umkehrzahl des Ergebnisses addiert werden. 625 – 526 = 099 099 + 990 = 1089 634 – 436 = 198 198 + 891 = 1089 Beschreibe, was dir in den zwei Beispielen auffällt. b) Rechne weitere Beispiele aus. Was stellst du fest? Notiere eine Vermutung. c) Warum meinst du, dass deine Vermutung zutrifft? Überprüfe deine Vermutung und zeige, ob sie stimmt. Tipp: Begründe mithilfe der Strategie Stellenwert extra oder mithilfe der Stellentafel. d) Ist das immer so? Warum? Warum nicht?	In Anlehnung an Büchter & Leuders (2011, S. 53)
Produkte von Rechnungspaaren untersuchen und begründen a) Rechne die acht Rechnungen aus und vergleiche die zwei Resultate von jedem Rechnungspaar. Was fällt dir auf? Beschreibe! $18 \cdot 119$ $30 \cdot 131$ $44 \cdot 145$ $63 \cdot 164$ $19 \cdot 118$ $31 \cdot 130$ $45 \cdot 144$ $64 \cdot 163$ b) Finde weitere Rechnungspaare mit der gleichen Eigenschaft und schreibe eine Vermutung auf. c) Warum meinst du, dass deine Vermutung zutrifft? Überprüfe sie und zeige, ob sie stimmt.	In Anlehnung an Diener et al. (2015a, S. 55)

d) Versuche aufzuzeigen, warum alle Rechnungspaare diese Eigenschaft haben.	
Summen von Zahlen aus drei identischen Ziffern untersuchen und begründen a) Du hast die drei Ziffern 1, 4 und 7 zur Verfügung. Schreibe alle möglichen dreistelligen Zahlen auf, die du mit diesen Ziffern bilden kannst. Addiere anschliessend alle dreistelligen Zahlen und teile die Summe aller Zahlen durch die Summe der drei gewählten Zahlen (1 + 4 + 7). Was fällt dir auf? Beschreibe! b) Wähle drei andere voneinander verschiedene Ziffern und verfahre gleich. Was stellst du fest? Schreibe deine Vermutung auf. c) Warum meinst du, dass deine Vermutung zutrifft? Überprüfe sie an weiteren Beispielen und zeige, dass sie stimmt. d) Trifft deine Vermutung immer zu? Warum? Warum nicht?	In Anlehnung an Affolter, Amstad, Doebeli & Wieland (2010, S. 11)
Anzahl Möglichkeiten, durch Addition von zwei Summanden eine bestimmte Summe zu bilden, untersuchen und begründen *Grundgedanke: mehrdeutige Voraussetzungen eingrenzen, Muster erkennen* a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahl 10 mit einer Addition zu bilden, wenn nur ganze Zahlen ab 1 als Summanden gewählt werden dürfen, die Summe aus zwei Summanden besteht und kommutative Paare, also z.B. 1 + 9 = 9 + 1 als eine Möglichkeit gelten? Erkläre, warum du denkst, alle Möglichkeiten gefunden zu haben. b) Wiederhole das Vorgehen für die Summe 11 und 12. Was fällt dir auf? Schreibe eine Vermutung auf. c) Überprüfe deine Vermutung und zeige, ob sie stimmt. d) Welche Muster erkennst du für die Anzahl Möglichkeiten? Beschreibe. e) Wie viele Möglichkeiten gibt es für irgendeine Zahl? Stelle eine Vermutung auf und überprüfe sie. f) Ist das immer so? Warum ist das so? Warum nicht?	In Anlehnung an Stylianides (2016, S. 42 ff.)
Rechnen mit negativen Zahlen Liftproblem und Unendlichkeit a) Du befindest dich in einem Gebäude mit zwölf Stockwerken über dem Boden und zwölf Stockwerken unter dem Boden (vgl. Abbildung). Wie viele Möglichkeiten gibt es für eine Person, den 2. Stock zu erreichen, wenn du stets den Direktweg wählst und keine Zwischenstopps einlegst? Beispiel: Du startest im Stockwerk –2 und gehst 4 Stockwerke nach oben (–2 + 4). b) Erkläre, warum du sicher alle Möglichkeiten gefunden hast. (25 Möglichkeiten, denn bei allen 25 Stockwerken kann man starten und dann eine positive oder eine negative Zahl addieren) c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn das Gebäude 13 Stockwerke unter und 13 über dem Boden hat? d) Wie sieht es mit je 14, 15, … Stockwerken aus? Schreibe eine Vermutung auf. e) Warum meinst du, dass deine Vermutung stimmt? Überprüfe sie. f) Ist das immer so? Warum? Warum nicht?	In Anlehnung an Stylianides (2016, S. 59**)**



Mögliche Weiterführung (Stylianides, 2016, S. 81)
Grundgedanke: Begründungsaufgabe mit einem singulären Fall
Nicht nur Berechnungsverfahren oder –algorithmus einsetzen, sondern Aussage rechtfertigen oder widerlegen und Vorhandensein einer mathematischen Herausforderung für Zielgruppe
→ Begründen leistet Beitrag zur Vertiefung von bereits vorhandenem Wissen über Berechnungsalgorithmus und –verfahren und kann der Auslöser für die Entwicklung von Konzepten sein
→ Begründen im Bereich des Berechnens kann helfen, die Aufmerksamkeit der Lernenden auf Regeln und Strukturen zu lenken und ihr Verständnis zu vertiefen.

Addition negativer Zahlen (vgl. Liftproblem)

a) Erzähle für die Rechnungen je eine Liftgeschichte.
   6 + (–6)
   (–6) + (6)
   (–6) + (–6)
b) Berechne anschliessend und erkläre, warum deine Lösungen richtig sind.
c) Schreibe eine Vermutung zur Addition mit Zahlen mit einem negativen Vorzeichen auf.
   Wird zu einer Zahl mit positiven Vorzeichen eine Zahl mit negativem Vorzeichen addiert, …
d) Überprüfe deine Vermutung mit anderen Rechnungen und zeige, ob sie stimmt.
e) Ist das immer so? Warum? Warum nicht?

Aufgaben zu Primzahlen

Primzahlen

Grundgedanke: Rechtfertigung/Widerlegung einer Aussage, von einem Fall zu endlich vielen Fällen zu unendlich vielen Fällen (Allgemeingültigkeit)

a) Ist 23 eine Primzahl? Warum/ warum nicht? Was ist an der Zahl besonders? Beschreibe!
b) Wie viele Primzahlen gibt es zwischen 10 und 20?
c) Gibt es zwischen 1 und 10 und 21 und 30 gleich viele Primzahlen? Schreibe eine Vermutung auf und überprüfe sie.
d) Wie sieht es mit den Anzahl Primzahlen zwischen 1 und 10 und 101 und 110 aus? Notiere eine Vermutung und überprüfe sie.
e) Warum meinst du, dass es so weitergeht?
f) Ist das immer so? Warum? Warum nicht?

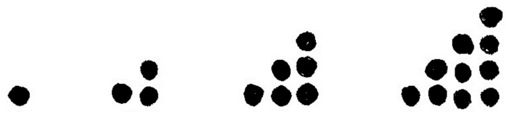
Mögliche Weiterführung

- Zeige, dass das Sechsfache irgendeiner Primzahl immer ein Vielfaches von 3 ist.
- Die Summe von irgendwelchen zwei Primzahlen ist wieder eine Primzahl. Denkst du, diese Aussage stimmt? Überprüfe sie. Warum denkst du, ist das so?

In Anlehnung an Stylianides (2016, S. 29)

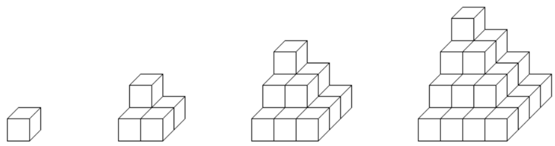
Aufgaben zu figurierten Zahlen, Folgen und Reihen (Verknüpfung Arithmetik und Geometrie)

Dreieckszahlen



a) Was siehst du? Beschreibe!
b) Wie geht es weiter? Setze die Folge/ das Muster fort!
c) Welche Muster, Eigenschaften und Strukturen entdeckst du? Beschreibe!
d) Erkläre mit einer Regel, wie es weitergeht!
e) Überprüfe deine Regel und zeige, ob sie stimmt.
f) Ist das immer so? Warum ist das so? Warum nicht?

Mögliche Weiterführung: Pyramidenzahlen

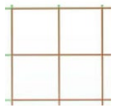


a) Was siehst du? Beschreibe!
b) Wie geht es weiter? Setze die Folge/ das Muster fort!
c) Welche Muster, Eigenschaften und Strukturen entdeckst du? Beschreibe!
d) Erkläre mit einer Regel, wie es weitergeht!
e) Überprüfe deine Regel und zeige, ob sie stimmt.
f) Ist das immer so? Warum ist das so? Warum nicht?

In Anlehnung an Leuders, (2010, S. 115 ff.)

<table>
<tr>
<td>

Anzahl mögliche Quadrate untersuchen und begründen
Grundgedanke: Begründungsaufgaben mit endlich vielen Fällen



Gegeben ist ein 2 x 2-Quadrat auf kariertem Papier (2 x 2 Häuschen).

a) Wie viele verschiedene Quadrate kannst du in diesem Quadrat einzeichnen? Zeige auf, dass dies alle sind. (Lösung: vier 1 x 1-Quadrate und ein 2 x 2-Quadrat)
b) Nun ist ein 3 x 3-Quadrat vorgegeben. Wie viele verschiedene Quadrate kannst du in diesem Quadrat einzeichnen? Zeige auf, dass dies alle sind. (Lösung: neun 1 x 1 Quadrate, vier 2 x 2-Quadrate, ein 3 x 3-Quadrat)
c) Wie viele verschiedene Quadrate kannst du in einem 4 x 4- (30) und 5 x 5- (55) Quadrat einzeichnen? Zeige auf, dass dies alle sind.
d) Wie geht es weiter: Wie viele Quadrate kommen jeweils hinzu? Findest du Muster und Regelmässigkeiten? ($1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$) Schreibe deine Vermutungen auf und überprüfe sie. Warum passiert das?
e) Wende deine Vermutung auf 10 x 10- und 60 x 60-Quadrat an!

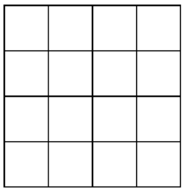
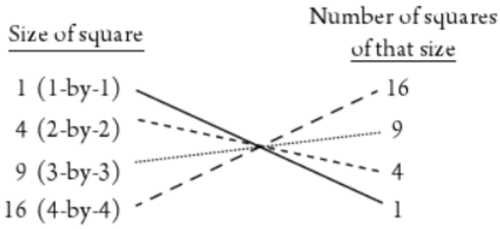


Figure 1.1 A 4-by-4 square.



</td>
<td>In Anlehnung an Stylianides (2016, S. 2)</td>
</tr>
</table>

4.2 Aufgaben zum Kompetenzbereich «Form & Raum»

Die nachfolgenden Aufgabenbeispiele stammen vorwiegend aus dem Kompetenzbereich «Form & Raum», stehen aber auch in Verbindung mit dem Kompetenzbereich «Zahl & Variable». Auch diese Aufgaben haben vorwiegend innermathematischen Charakter.

<table>
<tr>
<th>Aufgaben zu Umfang und Fläche</th>
<th>Quelle</th>
</tr>
<tr>
<td>

Was passiert mit dem Umfang eines Quadrates, wenn du
– die Seitenlänge verdoppelst?
– die Seitenlänge verdreifachst?
– die Seitenlänge halbierst?

a) Probiere es an Beispielen aus.
b) Beschreibe, was mit dem Umfang passiert und stelle eine Vermutung auf.
c) Überprüfe deine Vermutung an weiteren Beispielen und zeige, ob sie stimmt.
d) Stelle eine allgemeine Regel auf und erkläre sie.
e) Funktioniert die Regel immer? Ist das immer so? Warum? Warum nicht?

</td>
<td>In Anlehnung an Diener et al. (2015a, S. 19)</td>
</tr>
</table>

Was passiert mit der Fläche eines Quadrates, wenn du – die Seitenlänge verdoppelst? – die Seitenlänge verdreifachst? – die Seitenlänge halbierst? a) Probiere es an Beispielen aus. b) Beschreibe, was mit der Fläche passiert und stelle eine Vermutung auf. c) Überprüfe deine Vermutung an weiteren Beispielen und zeige, ob sie stimmt. d) Stelle eine allgemeine Regel auf und erkläre sie. e) Funktioniert die Regel immer? Ist das immer so? Warum? Warum nicht?	In Anlehnung an Diener et al. (2015a, S. 19)
Was passiert mit dem Umfang eines Rechtecks, wenn du – die Länge verdoppelst? Die Breite verdoppelst? Länge und Breite verdoppelst? – die Länge verdreifachst? Die Breite verdreifachst? Länge und Breite verdreifachst? – die Länge halbierst? Die Breite halbierst? Länge und Breite halbierst? a) Probiere es an Beispielen aus. b) Beschreibe, was mit dem Umfang passiert und stelle eine Vermutung auf. c) Überprüfe deine Vermutung an weiteren Beispielen und zeige, ob sie stimmt. d) Stelle eine allgemeine Regel auf und erkläre sie. e) Funktioniert die Regel immer? Ist das immer so? Warum? Warum nicht?	In Anlehnung an Diener et al. (2015a, S. 19)
Was passiert mit der Fläche eines Rechtecks, wenn du – die Länge verdoppelst? Die Breite verdoppelst? Länge und Breite verdoppelst? – die Länge verdreifachst? Die Breite verdreifachst? Länge und Breite verdreifachst? – die Länge halbierst? Die Breite halbierst? Länge und Breite halbierst? a) Probiere es an Beispielen aus. b) Beschreibe, was mit der Fläche passiert und stelle eine Vermutung auf. c) Überprüfe deine Vermutung an weiteren Beispielen und zeige, ob sie stimmt. d) Stelle eine allgemeine Regel auf und erkläre sie. e) Funktioniert die Regel immer? Ist das immer so? Warum? Warum nicht?	In Anlehnung an Diener et al. (2015a, S. 19)

4.3 Aufgaben zum Kompetenzbereich «Grössen, Funktionen, Daten & Zufall»

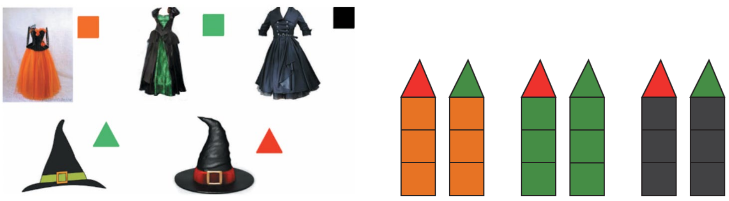
Auch im Kompetenzbereich «Grössen, Funktionen, Daten & Zufall» lässt sich sehr gut argumentieren. Dieser – relativ breit gefasste – Anwendungsbereich ermöglicht insbesondere im Zusammenhang mit grundlegenden mathematischen Beziehungen zu argumentieren. Diese Aufgabenstellungen befassen sich mit aussermathematischen Kontexten.

Aufgaben zu Funktionen, Daten und Zufall	
Briefmarkenproblem Du hast viele 10-Rappen-, 20-Rappen- und 30-Rappen-Briefmarken. Mit den vorhandenen Marken kannst du verschiedene Beträge bilden. 30 Rappen kannst du auf verschiedene Arten legen, nämlich mit drei 10-Rappen-Marken, mit einer 10-Rappen-Marke und einer 20-Rappen-Marke oder mit einer 30-Rappen-Marke. a) Erforsche, wie viele Möglichkeiten es gibt, die Beträge 40 Rappen, 50 Rappen und 60 Rappen zu bilden. b) Zeige, warum dies alle Möglichkeiten sein müssen (Idee: Strukturiertes Aufschreiben!)	Stylianides (2016, S. 30)

c) Stimmen diese Aussagen? Warum oder warum nicht? – Du kannst 70 Rappen auf sieben verschiedene Arten legen. – Du kannst 80 Rappen auf acht verschiedene Arten legen. – Du kannst jeden x-beliebigen Betrag auf x verschiedene Arten legen. **Mögliche Weiterführung** (Büchter & Leuders, 2012, S. 56): Wenn es Lollis für 10 Rappen, 20 Rappen und 25 Rappen das Stück gibt, wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, 1 Franken auszugeben? Begründe, warum du sicher bist, alle Möglichkeiten gefunden zu haben!	
Zwei-Münzen-Problem (ohne Reihenfolge, mit Wiederholung) *Grundgedanke: Begründungsaufgaben mit mehreren, aber endlich vielen Fällen* *→ alle Möglichkeiten in einer Situation finden und dies begründen* Du hast viele 5-Räppler, 10-Räppler und 20-Räppler im Hosensack und ziehst zufällig zwei raus. a) Wie viel Geld kannst du nun in der Hand haben? Schreibe alle Möglichkeiten auf! b) Wie weisst du, dass du alle Möglichkeiten von Beträgen gefunden hast? Begründe deine Antwort. c) Schreibe eine Regel auf, wie du die Anzahl Möglichkeiten berechnen kannst. d) Nun ziehst du zufällig drei Münzen aus dem Hosensack. Wie viel Geld kannst du jetzt in der Hand haben? Schreibe alle Möglichkeiten auf. e) Erkläre auch hier, warum du sicher bist, alle Möglichkeiten gefunden zu haben. f) Überprüfe mit deiner Regel. g) Gilt deine Regel immer? Warum? Warum nicht? h) Stelle, falls deine Regel nicht gilt, eine neue auf und prüfe sie erneut.	In Anlehnung an Stylianides (2016, S. 91)
Datumproblem (mit Reihenfolge, ohne Wiederholung) *Grundgedanke: Begründungsaufgaben mit mehreren, aber endlich vielen Fällen* *→ alle Möglichkeiten in einer Situation finden und dies begründen* a) Welche zweistelligen Zahlen kann man mit 5 und 9 bilden? Schreibe alle Möglichkeiten auf. b) Heute ist der 15.2. Nimm die Ziffern 1, 5 und 2 und bilde alle möglichen dreistelligen Zahlen. c) Wie weisst du, dass du alle gefunden hast? Erkläre! (Ordnung schaffen und systematisch aufschreiben, eine Ziffer fix) d) Findest du eine Regel für die Berechnung der Anzahl Möglichkeiten? e) Du hast am 21.04. Geburtstag. Wie viele verschiedene vierstellige Zahlen kannst du mit den Ziffern 2, 1, 0 und 4 bilden? f) Überprüfe mit deiner Regel. g) Gilt deine Regel immer? Warum? Warum nicht? h) Stelle, falls deine Regel nicht gilt, eine neue auf und prüfe sie erneut am Geburtstagsbeispiel. **Mögliche Weiterführung: Anstehproblem** (Stylianides, 2016, S. 95-98) Es ist Mittwochnachmittag und du gehst mit zwei Schulkameraden ins Kino. a) Wie viele Möglichkeiten (Reihenfolgen) gibt es für euch drei Kinder, vor der Kinokasse anzustehen? Schreibe alle Möglichkeiten auf.	In Anlehnung an Stylianides (2016, S. 92 ff.)

b) Wie weisst du, dass du alle Möglichkeiten gefunden hast? Erkläre!
c) Wie viele Möglichkeiten zum Anstehen gibt es für vier Kinder? Wie viele für fünf Kinder? Schreibe alle Möglichkeiten auf!
d) Wie viele Möglichkeiten kommen stets hinzu? Erkennst du ein Muster?
e) Formuliere eine Regel für die Berechnung der Anzahl Möglichkeiten und überprüfe sie.
f) Gilt deine Regel immer? Wie viele Möglichkeiten gibt es für sechs, sieben, … eine x-beliebige Anzahl von Kindern, vor dem Kino anzustehen?

Outfitproblem (ohne Reihenfolge, ohne Wiederholung)
a) Deine Lehrerin hat drei Röcke und zwei Hüte. Auf wie viele verschiedene Arten kann sie sich anziehen? (6 Möglichkeiten: 3 · 2)
b) Warum weisst du, dass du alle Möglichkeiten gefunden hast? Zeige dein Denken zeichnerisch auf, in dem du für die verschiedenen Röcke ein farbiges Quadrat und für die verschiedenen Hüte ein farbiges Dreieck verwendest.



c) Wie sieht es aus, wenn deine Lehrerin drei Röcke und drei Hüte hat? (es kommen 3 neue Outfits hinzu, also 9 insgesamt.)
d) Nun hat deine Lehrerin noch drei verschiedene Paar Socken. Wie viele verschiedene Outfits kann sie jetzt zusammenstellen? (Die 9 Outfits können je mit 3 verschiedenen Paar Socken kombiniert werden, also 9 · 3 = 27)
e) Wie viele Möglichkeiten kommen stets hinzu? Erkennst du ein Muster?
f) Formuliere eine Regel für die Berechnung der Anzahl Möglichkeiten und überprüfe sie.
g) Gilt deine Regel immer? Wie viele Möglichkeiten gibt es für sechs, sieben, … eine x-beliebige Anzahl von Röcken, Hüten und Socken zum Anziehen?

4.4 Weitere Aufgabensammlungen

Weitere für die Praxis fertig ausformulierte Aufgabenstellungen inkl. Lösungen gibt es auch in entsprechenden Lehrmittelzusätzen, zum Beispiel im Heft «Forschen 5/6» (Krummenacher & Reusser, 2016) oder in der Aufgabendatenbank zu den deutschen Bildungsstandards (Blum, Drüke-Noe, Hartung, & Köller, 2012). Diese Aufgabenstellungen, für den Einsatz ab der fünften Klasse konzipiert, lassen sich aber – etwas angepasst – auch bereits mit jüngeren oder mit älteren Schülerinnen und Schülern bearbeiten.

5 Förderung von spezifischem Methodenwissen

Esther Brunner & Romaine Jullier

5.1 Worum geht es?

Bei der Förderung von spezifischem Methodenwissen zum mathematischen Begründen und Argumentieren geht es um den gezielten Aufbau von passenden Strategien und Kenntnissen, die für das Argumentieren und Begründen in der Mathematik notwendig sind. Dazu gehören: 1) Strategien zum Aufdecken eines Zusammenhangs und 2) Möglichkeiten zum Formulieren eines Zusammenhangs sowie 3) die Förderung der drei Facetten von bereichsspezifischem Methodenwissen (Kapitel 2.4).

Strategien zum Aufdecken von Zusammenhängen sind beispielsweise folgende (Brunner, 2018c, S. 11):

- Suchen von Beispielen
- Suchen von Gegenbeispielen
- Verallgemeinern: Gilt etwas nicht nur für den Einzelfall, sondern für die ganze Klasse von Fällen?
- Untersuchungen an ähnlichen bekannten Fällen
- Untersuchen eines Spezialfalls
- Vereinfachen und Reduzieren der Voraussetzung(en)
- Beginn mit der kleinsten Zahl oder Figur (Induktionsanfang) und die logische Übertragung auf den nächsten Fall (Induktionsschritt)

Zum Formulieren eines Zusammenhangs eignen sich folgende Möglichkeiten (Brunner, 2018c, S. 11):

- Zusammenhang *erzählen*
- Zusammenhang durch eine konkrete Handlung *zeigen*
- Zusammenhang *inhaltlich-anschaulich machen*, das heisst grafisch darstellen, zum Beispiel durch Markierungen, Pfeile, Skizzen
- Zusammenhang *in einer Tabelle darstellen*, zum Beispiel durch eine zweispaltige Darstellung von Einzelfällen und Ergebnis

- Zusammenhang *durch eine Gleichung mit Zahlenbeispielen oder algebraisch ausdrücken*

Für die Förderung der drei Facetten von bereichsspezifischem Methodenwissen sind folgende Aspekte wichtig (Brunner, 2018c, S. 13f.):

- Wissen zum Argumentationsschema:
  - Sortieren von verschiedenen Argumenten nach Alltags- beziehungsweise mathematischem Argument (siehe unten)
  - Ordnen von verschiedenen Argumenten nach ihrer Überzeugungskraft
- Wissen zur Argumentsstruktur:
  - Unterscheiden von Voraussetzungen, Behauptung und Begründung (z.B. durch Markieren oder Einfärben der einzelnen Teile)
  - Analysieren von Argumenten nach Voraussetzung, Behauptung und Begründung (Was wird behauptet? Was sind die Voraussetzungen dafür, die gelten müssen? Welche Schlussfolgerung wird gezogen bzw. wie wird die Behauptung begründet?)
  - Suchen von Lücken in der Argumentstruktur (Sind alle notwendigen Teile – Voraussetzung(en), Behauptung(en), Begründung(en) – vorhanden?)
  - Brücken bilden zwischen Voraussetzungen und Behauptungen durch Begründungen (z.B. richtiges Zusammenstellen von entsprechenden Karten zu den einzelnen Teilen einer Argumentation eines Sachverhaltes)
- Wissen zur Argumentationskette:
  - Ordnen von verschiedenen Argumenten und Argumentsteilen als «Wenn-dann-Struktur» oder als «Es-muss-immer-so-sein-weil-Satz»
  - Auswählen von Argumenten, die sich zu einer Argumentationskette verbinden lassen

5.2 Umsetzungsbeispiele

Die folgenden Beispiele zeigen anhand von je einer Behauptung auf, wie man gezielt an den bereichsspezifischen Methodenkompetenzen arbeiten kann. Dazu wird die Begründung vorgestellt und die Lernenden erhalten einen entsprechenden Arbeitsauftrag zum Sortieren und Ordnen der Begründungen nach ihrer Überzeugungskraft (Wissen zum Argumentationsschema), nach ihrer Gültigkeit (Wissen zur Struktur des Arguments) und ihrer Zulässigkeit in der Mathematik (Wissen zum Argumentationsschema). Wissen zur Argumentationskette kann damit gefördert werden, indem eine Argumentation anschliessend in Einzelteile zerlegt und inhaltlich sinnvoll zusammengesetzt und gegebenenfalls ergänzt wird.

5.2.1 Beispiel 1

Behauptung

Wenn man eine gerade und eine ungerade Zahl addiert, ist das Ergebnis immer eine ungerade Zahl.

Arbeitsaufträge

1) Schneide die Begründungen aus.
2) Ordne die Begründungen nach ihrer Überzeugungskraft:
    a. Beginne mit der Begründung, die dich am wenigstens überzeugt, und ende mit derjenigen, die du am überzeugendsten findest.
    b. Erläutere deine Reihenfolge und stelle sie in der Klasse oder in der Gruppe vor.
3) Bilde drei Gruppen von Begründungen (Korrektheit):
    a. Diese Begründungen sind falsch.
    b. Diese Begründungen kann man nicht überprüfen oder beurteilen.
    c. Diese Begründungen sind korrekt.

    Vergleiche deine Gruppierungen mit denjenigen eines Mitschülers oder einer Mitschülerin. Erklärt einander, warum ihr Begründungen einer bestimmten Gruppe zugeordnet habt, und diskutiert darüber.

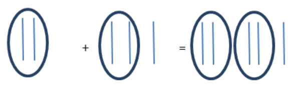
4) Bilde zwei Gruppen von Begründungen (Zulässigkeit):

   a. Diese Begründungen darf man in der Mathematik verwenden.

   b. Diese Begründungen darf man in der Mathematik nicht verwenden.

Vergleiche deine Gruppierungen mit denjenigen eines Mitschülers oder einer Mitschülerin. Erklärt einander, warum ihr Begründungen einer bestimmten Gruppe zugeordnet habt, und diskutiert darüber.

Material

Lisa sagt: Eine gerade Zahl plus eine ungerade Zahl ergibt immer eine ungerade Zahl, ich habe es nämlich an einem Beispiel probiert: $2 + 3 = 5$.	$2 + 1 = 3 \rightarrow$ ungerade Zähle ich zu beiden Zahlen 1 dazu, $(2 + 1) + (1 + 1) = 3 + 2 = 5$, wird das Ergebnis um 2 grösser, ist also immer noch ungerade. Diesen Vorgang kann ich immer weiterführen.
Nik: Unsere Lehrperson hat gesagt, dass die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl immer ungerade ist. Deshalb stimmt es.	Paulo erklärt Folgendes: Die erste Zahl ist gerade. Bei der Division durch zwei hat sie also Rest 2. Die zweite Zahl ist ungerade. Bei der Division durch zwei entsteht Rest 1. Alle ungeraden Zahlen haben bei der Division durch 2 Rest 1. Addiert man die beiden Zahlen, so entsteht bei der Division durch 2 also Rest 2 plus Rest 1, was Rest 3 ergibt. Somit hat die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl bei der Division durch 2 immer Rest 3 und die Summe muss immer ungerade sein.
Nina: Ich habe meine Freundin gefragt, die ist gut in Mathe und sie sagt, dass es stimmt. Darum stimmt das immer.	Noah sagt: Ich habe die Aussage an kleinen und grossen Zahlen überprüft: $2 + 1 = 3$ $26 + 37 = 63$ $1002 + 1'300'201 = 1'301'003$ Eine gerade Zahl plus eine ungerade Zahl ergibt also immer eine ungerade Zahl.
Lars: Nein, das stimmt nicht. Ich habe ein Gegenbeispiel gefunden. 81 + 3 = 84. Das Ergebnis ist hier gerade.	Lea:  Ich habe eine Skizze gemacht. Ich kann bei den beiden Summanden beliebig viele 2er-Päckli für x-beliebige gerade oder ungerade Zahlen hinzufügen. Bei der Summe bleibt immer ein Strich übrig (unvollständiges 2er-Päckli). Somit ist die Summe immer ungerade.

Carla sagt: Ich stelle mir das so vor. 2 Schwestern haben am exakt gleichen Tag Geburtstag und unterscheiden sich um 3 Jahre. Eine der Schwestern hat immer eine gerade Anzahl Jahre, die andere zur gleichen Zeit eine ungerade Anzahl Jahre. Wenn die eine 10 Jahre alt ist, ist die andere 13 Jahre alt. Zusammengezählt sind das 23 Jahre. Werden beide 1 Jahr älter, kommen bei der Gesamtzahl der Anzahl Jahre 2 dazu. Zusammengezählt haben sie stets eine ungerade Anzahl Jahre. Es ist die Reihe der ungeraden Zahlen.	Zoe: Wir haben so etwas bereits in der vierten Klasse einmal gemacht. Da ging es auch. Deshalb stimmt es hier auch.

5.2.2 Beispiel 2

Behauptung

Die Summe von vier aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch 2 teilbar, aber nie durch 4.

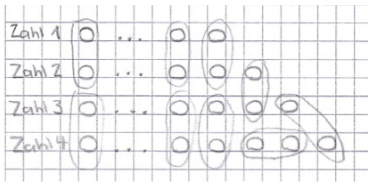
Arbeitsaufträge

1) Schneide die Begründungen aus.
2) Ordne die Begründungen nach ihrer Überzeugungskraft:
    a. Beginne mit der Begründung, die dich am wenigsten überzeugt, und ende mit derjenigen, die du am überzeugendsten findest.
    b. Erläutere deine Reihenfolge und stelle sie in der Klasse oder in der Gruppe vor.
3) Bilde drei Gruppen von Begründungen (Korrektheit):
    a. Diese Begründungen sind falsch.
    b. Diese Begründungen kann man nicht überprüfen oder beurteilen.
    c. Diese Begründungen sind korrekt.

    Vergleiche deine Gruppierungen mit denjenigen eines Mitschülers oder einer Mitschülerin. Erklärt einander, warum ihr Begründungen einer bestimmten Gruppe zugeordnet habt, und diskutiert darüber.
4) Bilde zwei Gruppen von Begründungen (Zulässigkeit):
    a. Diese Begründungen darf man in der Mathematik verwenden.
    b. Diese Begründungen darf man in der Mathematik nicht verwenden.

Vergleiche deine Gruppierungen mit denjenigen eines Mitschülers oder einer Mitschülerin. Erklärt einander, warum ihr Begründungen einer bestimmten Gruppe zugeordnet habt, und diskutiert darüber.

Material

Sara: Die erste Summe von 4 aufeinanderfolgenden Zahlen ist $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ und durch 2 teilbar, aber nicht durch 4. Bei der nächsten Summe von 4 aufeinanderfolgenden Zahlen wird jeder Summand um 1 grösser. Dies führt zu einer Vergrösserung der Summe um 4: $(1 + 1) + (2 + 1) + (3 + 1) + (4 + 1) = 10 + 4 = 14$. 14 ist durch 2 teilbar, jedoch nicht durch 4. Somit muss jede folgende Summe von 4 aufeinanderfolgenden Zahlen durch 2 teilbar sein, weil jeweils jeder Summand um 1 vergrössert wird und dies bei 4 Summanden immer zu einer Vergrösserung von 4 führt. Die Summe ist jedoch nie durch 4 teilbar, da die erste Summe von 4 aufeinanderfolgenden Zahlen 10 ist und die nächste um 4 grösser ist usw.	Tim: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ $15 + 16 + 17 + 18 = 66$ $114 + 115 + 116 + 117 = 462$ → Die Summen in den 3 Beispielen sind durch 2 teilbar, jedoch nicht durch 4. Also ist die Summe von 4 aufeinanderfolgenden Zahlen immer durch 2 teilbar, aber nie durch 4.
Jana: Im Lehrmittel steht geschrieben, dass 4 aufeinanderfolgende Zahlen stets durch 2, jedoch nie durch 4 teilbar sind. Deshalb stimmt die Behauptung immer.	Lino: In der Abbildung ist die Summe von 4 aufeinanderfolgenden Zahlen, nämlich $3 + 4 + 5 + 6$ dargestellt. Auf der ersten Zeile hat es 3 Punkte, auf der zweiten 4 Punkte, auf der dritten 5 Punkte und auf der vierten 6 Punkte. Man kann senkrecht aus den vollständigen 4er Reihen immer 2er-Päckli machen. Am Schluss bleiben 6 Punkte übrig, welche ebenfalls zu drei 2er-Päckli verbunden werden können. $3 + 4 + 5 + 6$ ist also durch 2 teilbar, jedoch nicht durch 4. Senkrecht können beliebig viele Reihen mit 4 Punkten ergänzt werden für beliebige 4 aufeinanderfolgende Zahlen. 
Matteo: Ich habe zuerst gedacht, dass 4 aufeinanderfolgende Zahlen immer durch 2 und durch 4 teilbar sind. Bei meinem ersten Beispiel hat sich meine Vermutung jedoch bereits nicht bestätigt: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Das ist nur durch 2, jedoch nicht durch 4 teilbar. Durch das Gegenbeispiel habe ich meine Vermutung widerlegt. Ich habe aber an vielen Beispielen gezeigt, dass 4 aufeinanderfolgende Zahlen durch 2 teilbar sind. So sind zum Beispiel die beiden Summen $3 + 4 + 5 + 6 = 18$ und $10 + 11 + 12 + 13 = 46$ durch 2 teilbar. Die Behauptung «Die Summe von 4 aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer durch 2, jedoch nie durch 4 teilbar» stimmt für meine überprüften Beispiele.	Nina: Ich habe mit Plättchen gelegt: o + oo + ooo + oooo = ooooo ooooo. 10 Plättchen sind durch 2 teilbar, aber nicht durch 4. Hier stimmt es. Wenn ich die nächste Summe lege, kommt ja bei jedem Summanden 1 dazu, also oo + ooo + oooo + ooooo. Es kommen also 4 Plättchen neu dazu und 4 ist durch 2 teilbar. Wenn die erste Summe teilbar durch 2 ist, ist deshalb die nächste und die übernächste auch teilbar durch 2. Und das geht immer so weiter. Da die erste Summe nicht durch 4 teilbar ist und immer 4 Plättchen dazu kommen, kann die Summe nie durch 4 teilbar sein.

Mauro: Ich habe meinen Freund gefragt. Der ist gut in Mathe. Und er hat gesagt, dass die Behauptung immer stimmt. Wenn er das sagt, dann stimmt es.	Sven: 1 + 2 + 3 + 4 = 12 2 + 3 + 4 + 5 = 14 Die Summe von vier aufeinanderfolgenden Zahlen ist also immer durch 2 teilbar und manchmal auch durch 4.

5.2.3 Beispiel 3

Behauptung

Wenn man zwei beliebige ungerade Zahl addiert, ist das Ergebnis immer eine gerade Zahl.

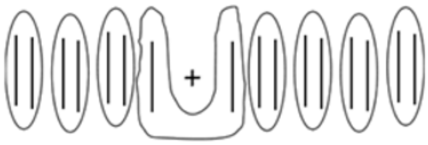
Arbeitsaufträge

1) Schneide die Begründungen aus.
2) Ordne die Begründungen nach ihrer Überzeugungskraft:
   a. Beginne mit der Begründung, die dich am wenigsten überzeugt, und ende mit derjenigen, die du am überzeugendsten findest.
   b. Erläutere deine Reihenfolge und stelle sie in der Klasse oder in der Gruppe vor.
3) Bilde drei Gruppen von Begründungen (Korrektheit):
   a. Diese Begründungen sind falsch.
   b. Diese Begründungen kann man nicht überprüfen oder beurteilen.
   c. Diese Begründungen sind korrekt.

   Vergleiche deine Gruppierungen mit denjenigen eines Mitschülers oder einer Mitschülerin. Erklärt einander, warum ihr Begründungen einer bestimmten Gruppe zugeordnet habt, und diskutiert darüber.
4) Bilde zwei Gruppen von Begründungen (Zulässigkeit):
   a. Diese Begründungen darf man in der Mathematik verwenden.
   b. Diese Begründungen darf man in der Mathematik nicht verwenden.

   Vergleiche deine Gruppierungen mit denjenigen eines Mitschülers oder einer Mitschülerin. Erklärt einander, warum ihr Begründungen einer bestimmten Gruppe zugeordnet habt, und diskutiert darüber.

Material

Christina sagt: Eine ungerade Zahl plus eine ungerade Zahl ergibt stets eine gerade Zahl, ich habe es nämlich an einem Beispiel probiert: $3 + 7 = 10$.	Joel sagt: Ich habe die Aussage an kleinen und grossen Zahlen überprüft: $1 + 5 = 6$ $25 + 37 = 62$ $1001 + 1'300'201 = 1'301'002$ Eine ungerade Zahl plus eine ungerade Zahl ergibt also immer eine gerade Zahl.
Sophie sagt: Ich stelle mir das so vor: Meine Lieblingszahl ist 7, eine ungerade Zahl. Die Lieblingszahl meines Bruders ist 21, also auch eine ungerade Zahl. Ohne auszurechnen, bin ich mir sicher, dass die Summe unserer beiden Lieblingszahlen eine gerade Zahl ist. Mein kleiner Bruder glaubt mir das nicht, also erkläre ich ihm Folgendes: Dividiere ich 7 durch 2, bleibt 1 übrig. Dividiere ich 21 durch 2, bleibt ebenfalls 1 übrig. Also bleiben insgesamt beim Dividieren unserer Lieblingszahlen durch zwei 1+1= 2 übrig, was ich dann durch 2 dividieren kann. Somit ist die Summe unserer beiden ungeraden Lieblingszahlen gerade. Wird eine ungerade Zahl durch 2 dividiert, bleibt stets 1 übrig. Werden also zwei ungerade Zahlen durch zwei dividiert bleibt je 1 übrig. Addiert man die beiden ungeraden Zahlen hat man 2 übrig gebliebene, was dann wieder durch 2 dividiert werden kann. Somit ist die Summe von zwei beliebigen ungeraden Zahlen durch 2 teilbar und gerade.	
Lea: Unsere Lehrperson hat gesagt, dass die Summe von zwei ungeraden Zahlen immer gerade ist.	Yan: 1 + 3 = 4 → gerade Zähle ich zu beiden Zahlen 1 dazu, also $(1 + 1) + (3 + 1)$, wird das Ergebnis um 2 grösser, ist also immer noch gerade. Diesen Vorgang kann ich immer weiterführen.
Fynn erklärt: Teilt man die erste ungerade Zahl auf 2 auf, bleibt Rest 0. Teilt man die zweite ungerade Zahl auf 2 auf, bleibt Rest 2. Zusammen ist das Rest 2, was sich durch 2 teilen lässt. Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist also stets durch 2 teilbar.	Felix sagt: Der erste Summand ist eine ungerade Zahl. Ungerade Zahlen setzen sich immer aus einer Anzahl 2er-Päckli zusammen sowie einem Strich, der übrig bleibt. Der zweite Summand ist ebenfalls eine ungerade Zahl. Auch hier bleibt ein 2er-Päckli unvollständig, respektive ein Strich bleibt übrig. Die Summe besteht aus einer Anzahl vollständiger 2er-Päckli sowie 2 einzelnen Strichen, aus welchen wieder ein 2er-Päckli gebildet werden kann. Somit ist die Summe von zwei ungeraden Zahlen immer gerade.

5.2.4 Beispiel 4

Zwei Arbeitsblätter zur Bearbeitung (entnommen aus Brunner, 2018c, S. 14 f.):

Warum ist das so?

In einer Mathematikstunde bekommt die Klasse 5a von ihrer Lehrerin folgende Aufgabe:

1 + 2 + 3 ist teilbar durch 3. Gilt dies für jede Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen?

1) Prüfe zunächst, was da behauptet wird, an verschiedenen Zahlenbeispielen.

2) Findest du ein Gegenbeispiel, mit dem du zeigen kannst, dass die Behauptung nicht stimmt und nicht jede Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen teilbar durch 3 ist?

3) Gilt die Behauptung für jede Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen?
Warum oder warum nicht? Begründe deine Antwort!

Antwort:
____
____
____

Begründung:
____
____
____

Begründungen sortieren

In der fünften Klasse finden die Schülerinnen und Schüler verschiedene Begründungen.
Nicht alle diese Begründungen sind korrekt und nicht alle überzeugen gleich stark.

Ja, das stimmt. Wenn es nicht stimmen würde, müssten wir das gar nicht überlegen.	Ja, das stimmt. 1 + 2 + 3 gibt 6. Und 6 ist teilbar durch 3.
So was hab ich schon mal gemacht. Da ging es auch. Deshalb stimmt es hier auch.	Das stimmt nicht ganz. 1 + 2 + 3 gibt 6. Und 6 ist teilbar durch 6, durch 3, durch 2 und durch 1.
Ja, das stimmt immer. Ich habe mir vorgestellt, dass ich eine Zahl und dann die nächste und übernächste nehme. Zur nächsten Zahl ist es 1 mehr, zur übernächsten ist es 2 mehr. Im Ganzen ist das 3 mehr. Und ich habe 3 Zahlen und beides ist durch 3 teilbar.	Klar. Das stimmt immer.
Ich hab 20 Beispiele geprüft und da war es immer so. Deshalb stimmt das immer.	Nein, das stimmt nicht. Ich hab ein Gegenbeispiel: 7 + 7 + 8 = 22. Das ist nicht teilbar durch 3.
Wenn die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen teilbar durch 3 ist, dann ist 1 + 2 + 3 durch 3 teilbar. Das stimmt. Also stimmt es immer.	Ich hab meine Freundin gefragt. Sie ist gut in Mathe und hat gesagt, dass das immer stimmt. Wenn sie das sagt, dann stimmt das.
Ich hab das mit Plättchen gelegt: o oo ooo. Hier stimmt es. Wenn ich die nächste Summe lege, kommt ja bei jedem Summanden 1 dazu, also o●oo●ooo● Es kommen also immer 3 neu dazu. Wenn die erste Summe teilbar ist durch 3, ist deshalb die nächste und die übernächste auch teilbar durch 3. Und das geht immer so weiter.	

Arbeitsaufträge

1) Schneide die Begründungen aus.
2) Ordne die Begründungen nach ihrer Überzeugungskraft:
    a. Beginne mit der Begründung, die dich am wenigsten überzeugt, und ende mit derjenigen, die du am überzeugendsten findest.
    b. Erläutere deine Reihenfolge und stelle sie in der Klasse oder in der Gruppe vor.

3) Bilde drei Gruppen von Begründungen (Korrektheit):
   a. Diese Begründungen sind falsch.
   b. Diese Begründungen kann man nicht überprüfen oder beurteilen.
   c. Diese Begründungen sind korrekt.

   Vergleiche deine Gruppierungen mit denjenigen eines Mitschülers oder einer Mitschülerin. Erklärt einander, warum ihr Begründungen einer bestimmten Gruppe zugeordnet habt, und diskutiert darüber.

4) Bilde zwei Gruppen von Begründungen (Zulässigkeit):
   a. Diese Begründungen darf man in der Mathematik verwenden.
   b. Diese Begründungen darf man in der Mathematik nicht verwenden.

   Vergleiche deine Gruppierungen mit denjenigen eines Mitschülers oder einer Mitschülerin. Erklärt einander, warum ihr Begründungen einer bestimmten Gruppe zugeordnet habt, und diskutiert darüber.

6 Begründungen einschätzen und beurteilen

Esther Brunner

6.1 Mehr als richtig und falsch!

Eine grosse Herausforderung für Lehrpersonen stellt auch das Einschätzen und Beurteilen von Begründungen dar. Die einfachste – aber nicht die beste oder ausreichende – Variante stützt sich ausschliesslich auf die Korrektheit beziehungsweise die Gültigkeit ab und fragt danach, ob eine vollständig korrekte Begründung vorliegt oder nicht. Für eine differenziertere Beschreibung von gezeigten Leistungen lassen sich bei Begründungen verschiedene Aspekte fokussieren (E. Brunner, 2020): Dies sind zum einen auf einer obersten Ebene die vier Prozessschritte mathematischen Argumentierens und zum anderen für die einzelnen Prozessschritte vertiefend weitere Bearbeitungsaspekte (siehe Abbildung 2):

1) Die Ausführungsqualität, das heisst: Ist der Prozessschritt korrekt, teilweise korrekt oder vollständig korrekt ausgeführt?
2) Die Art und Weise, in der die Antwort gegeben wird, das heisst: In welcher Repräsentationsform werden die Gedanken präsentiert (als Handlung, als Skizze, als Text, als Gleichung usw.)?
3) Die inhaltliche Lösungsidee, die der Begründung zugrunde liegt, das heisst: Welche kreative Idee wird zur Beschreibung, Begründung und zur Verallgemeinerung herangezogen?

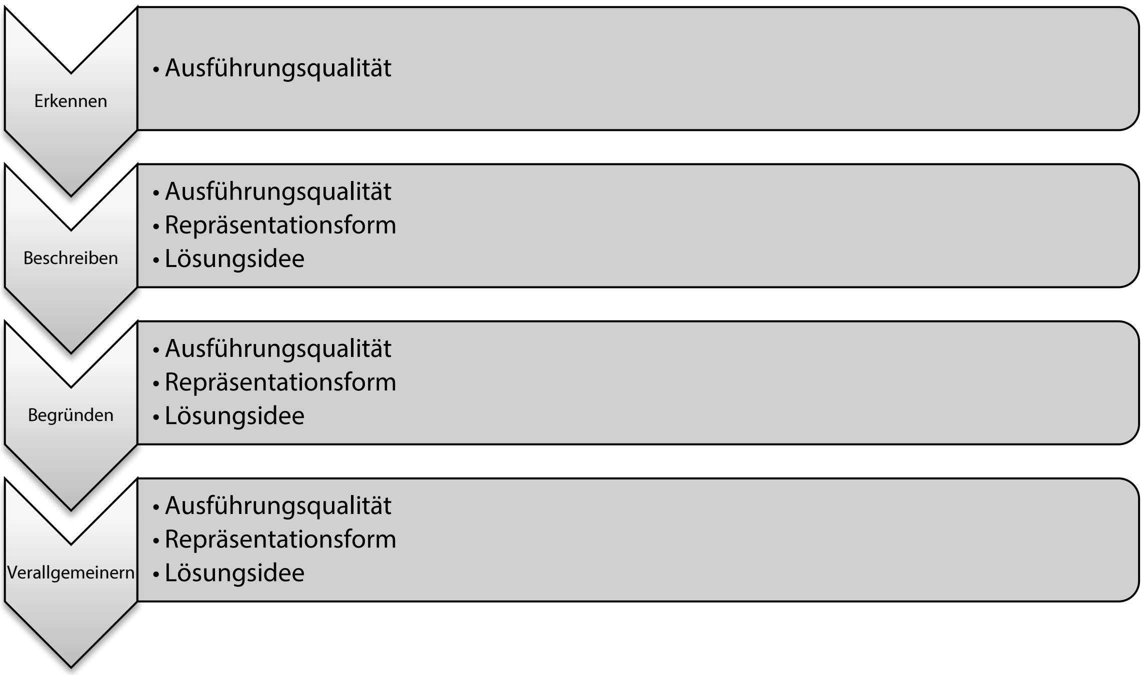


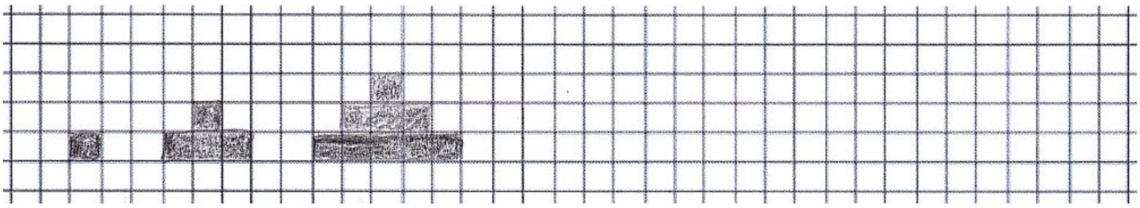
Abbildung 2: Beurteilung einzelner Prozessschritte

Ein solches Vorgehen ermöglicht erstens, entlang von vier Prozessschritten qualitativ zu bestimmen, welche Teilkompetenzen mathematischen Begründens und Argumentierens ein Kind zeigt. Zweitens lässt dieses Vorgehen zu, dass jeder gezeigte Prozessschritt nach weiteren Kriterien inhaltlich beschrieben und beurteilt werden kann. Eine solch differenzierte Beurteilung lässt sich auch in eine Bewertung nach Punkten übertragen, zumindest für die vier Prozessschritte, ob sie ausgeführt wurden oder nicht und falls ja, in welcher Ausführungsqualität (korrekt, teilweise korrekt oder vollständig korrekt). Die Repräsentationsform und die Lösungsidee, die gewählt werden, sagen hingegen mehr über Vorgehensweisen aus und stellen keine Hierarchie im Sinne von einer besser oder schlechter geeigneten Repräsentationsform oder Lösungsidee dar.

6.2 Ein Beispiel

Betrachten wir eine Lösung zur Beispielaufgabe aus Kapitel 3.1.

1. Das sind die ersten drei Figuren einer Folge. Zeichne weiter!



2. Schreibe oder zeichne eine Anleitung, wie man das Muster weiterführen kann!

3. Schreibe zu den einzelnen Figuren, wie viele Kästchen du brauchst, um sie zu zeichnen.
Wie viele Kästchen braucht man für die 7. Figur? Erkläre, warum es genau so viele sind?

4. Wie muss deine Erklärung heissen, dass sie **immer** (für irgendein Beispiel, also auch für die 50., 100. oder 1000. Figur) funktioniert?

Lino zeichnet bei Teilaufgabe 1 die weiteren Figuren korrekt weiter, bearbeitet anschliessend Teilaufgabe 2, nicht mehr aber Teilaufgabe 3 und 4. Bei Teilaufgabe 2 schreibt Lino (Abbildung 3):

Man muss immer, die „Burg" oben
eins grösser und auf dein Seiten
ein grösser machen. Aber den
zwei Häuschen Abstand halten.

Abbildung 3: Antwort von Lino Teilaufgabe 2

Linos Arbeit lässt sich entlang der verschiedenen Aspekte genauer beschreiben (Abbildung 4):

Lino erkennt die Struktur und führt sie korrekt weiter. Er kann die erkannte Struktur korrekt beschreiben und wählt dafür eine sprachlich-symbolische Form in Form eines Textes (narrativ). Die Lösungsidee, die er dafür beizieht, ist eine Art Ummantelung, das heisst, er stellt sich vor, über die vorherige Figur jeweils auf den Seiten je + 1 Häuschen zu zeichnen und eines auf die Spitze zu setzen. Den Schritt des Begründens und Verallgemeinerns führt er nicht aus.

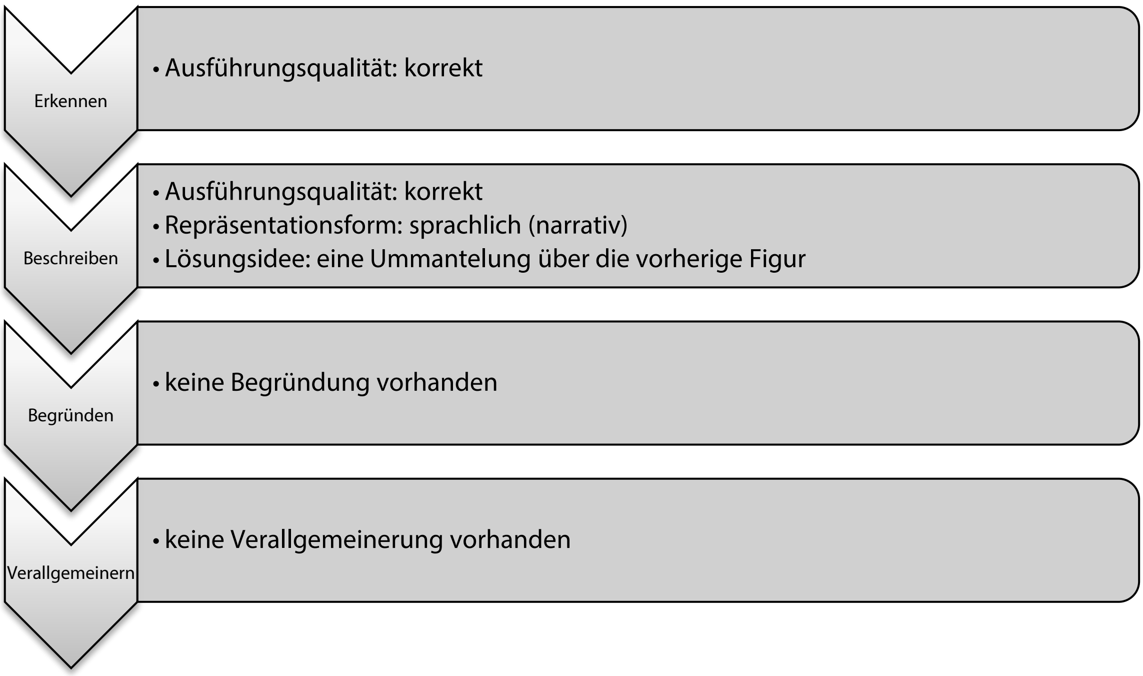


Abbildung 4: Beurteilung von Linos Arbeit entlang der vier Prozessschritte

Eine solche qualitative Beschreibung der gezeigten Kompetenzen, wie sie im Beispiel für Lino ausgeführt wurde, ermöglicht erstens, dass präziser bestimmt werden kann, welche Leistung ein Kind gerade zeigt, und zweitens können so nächste Entwicklungs- und Förderschritte bestimmt werden. Lino nimmt keine Begründung vor. Dies wäre der nächste Prozessschritt, das heisst, eine Förderung von Lino müsste darauf abzielen, dass er versucht, eine Begründung zu finden. Dazu müsste sein Blick auf die Anzahl der Häuschen gelenkt werden, die nötig sind, um eine Figur zu zeichnen. Dies wäre die Voraussetzung, dass Lino einen Zusammenhang zwischen der Anzahl Häuschen und der Nummer der Figur erkennen könnte.

7 Literatur

Affolter, W., Amstad, H., Doebeli, M. & Wieland, G. (2010). *Schweizer Zahlenbuch 6. Schulbuch.* (1. Aufl.). Zug: Klett und Balmer Verlag.

Amt für Volksschule des Kantons Thurgau. (2016). *Lehrplan Volksschule Thurgau. Mathematik*. Frauenfeld: Amt für Volksschule des Kantons Thurgau.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.). (2012). *Bildungsstandards Mathematik: Konkret. Sekundarstufe 1: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (6. Aufl.). Berlin: Cornelsen.

Brunner, E. (2016). Bin ich ein Teil von dir? Kindergartenkinder lernen mathematisch argumentieren. *4 bis 8*, *8*, 37–39.

Brunner, E. (2018a). *Mathematisches Argumentieren im Kindergarten fördern. Eine Handreichung*. Kreuzlingen: PHTG.

Brunner, E. (2018b). *Mathematisches Begründen Lehren und Lernen: Intervention (MaBeLL-INT). Projektbeschreibung*. Kreuzlingen: PH Thurgau.

Brunner, E. (2018c). Warum so und nicht anders? Vom Aufbau spezifischer Begründungskompetenzen. *Mathematik lehren*, *211*, 11–15.

Brunner, E. (2019). Förderung mathematischen Argumentierens im Kindergarten: Erste Erkenntnisse aus einer Pilotstudie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *40*(2), 323–356.

Brunner, E. (2020). Wie lassen sich schriftliche Begründungen von Schülerinnen und Schülern des 5. und 6. Schuljahrs beschreiben? In S. Krauss, K. Binder, & A. Frank (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 1131–1134). Münster: VTM.

Brunner, E., Jullier, R. & Lampart, J. (2019). Aufgabenangebot zum mathematischen Begründen in je zwei aktuellen Mathematikbüchern. *SZBW*, *41*(3), 1–18.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Berlin: Springer.

Büchter, A. & Leuders, T. (2011). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern–Leistung überprüfen.* Berlin: Cornelsen Verlag.

D-EDK. (2014). *Lehrplan 21. Mathematik*. Bern: Projekt Lehrplan 21.

D-EDK. (Hrsg.). (2016). *Lehrplan 21. Mathematik.* Abgerufen von www.lehrplan21.ch

Diener, M., Keller, B., Kummer, V., Meyer-Rieser, E., Schelldorfer, R., Studer Brodmann, H. & Keller, R. (2015a). *Mathematik 5. Themenbuch.* (1. Aufl.). Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Eemeren van, F. H. & Grootendorst, R. (2004). *A Systematic Theory of Argumentation. The pragma-dialectical approach*. Cambridge: University Press.

Fuson, K. (1988). *Children's counting and number concept*. New York: Springer.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Wien: Springer.

Heinze, A. & Reiss, K. (2003). *Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competencies*. Gehalten auf der CERME3, Bellaria. Abgerufen von http://ermeweb.free.fr/CERME3/Groups/TG4/TG4_Heinze_cerme3.pdf

Jahnke, H. N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331–355). Heidelberg: Springer Spektrum.

Krummenacher, R. & Reusser, L. (2016). *Forschen 5/6*. Zug: Klett und Balmer Verlag.

Philipp, K. (2013). *Experimentelles Denken: Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz*. Abgerufen von http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:1111-20121202191

Polya, G. (1995). *Schule des Denkens (4. Aufl.)*. Bern: Francke.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, *7*(1), 5–41.

Reiss, K. & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. *JB DMV*, *111*(4), 155–177.

Reusser, K. (1984). *Problemlösen in wissenstheoretischer Sicht. Problematisches Wissen, Problemformulierung und Problemverständnis* (Neudruck: 1994). Bern: Universität Bern.

Rolles, G. (Hrsg.). (2001). *Duden–Basiswissen Schule. ... Mathematik*. Berlin: Paetec.

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary Mathematics Classroom*. Oxford: OUP Oxford.

Toulmin, S. E. (1996). *Der Gebrauch von Argumenten (2. Aufl.)*. Weinheim: Beltz.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S. & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. *Journal für Mathematik-Didaktik JMD*, *30*(1), 30–54.

Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D. & Köller, O. (Hrsg.). (2008). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen.

September 2020

Kontakt

Pädagogische Hochschule Thurgau
Forschung
Unterer Schulweg 3
CH-8280 Kreuzlingen 2
Tel. +41 (0)71 678 56 56
office@phtg.ch
www.phtg.ch

thurgauwissenschaft